

2019 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 60 分です。
5. 問題は 3 ページで大問 3 問です。余白は計算用紙です。

〔 I 〕 座標平面上に 2 点 $A(1, 0)$, $B(-2, 0)$ がある。次の をうめよ。

(1) A , B からの距離の比が $2:1$ である点の軌跡は、点 ① を中心とし
半径が ② の円である。

(2) 点 $C(x, y)$ に対して、 A , B それぞれから C までの距離の 2 乗の和は x, y
を用いて ③ と表され、その最小値は ④ である。 a を
 ④ $< a$ を満たす定数とする。 A , B それぞれからの距離の 2 乗の和が
 a である点の軌跡は、点 ⑤ を中心とし半径が ⑥ の円である。

(3) (1) で求めた円と (2) で求めた円が接するのは、 $a =$ ⑦ , ⑧
のときである。ただし、 ⑦ $<$ ⑧ とする。

〔Ⅱ〕 平面上に平行四辺形 OACB がある。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおき, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ とする。また, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を k とおく。次の をうめよ。ただし, ①, ④, ⑤, ⑥ は k の式でうめよ。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると, $\cos \theta =$ ① である。これより, k の範囲は

$$- \text{ ② } < k < \text{ ② }$$

である。 $\overrightarrow{OC}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて $\overrightarrow{OC} =$ ③ と表される。

$k \neq 0$ であるとき, 点 A から直線 OB へ垂線を引き, 直線 OB との交点を L とおく。 $\overrightarrow{AL}$ と $\overrightarrow{OB}$ が垂直であることから, $\overrightarrow{OL} =$ ④ $\vec{b}$ であることがわかる。同様にして, B から直線 OA へ垂線を引き, 直線 OA との交点を M とし, 点 L を通り直線 OA に平行な直線と直線 AC との交点を N とする。 $\triangle LMN$ の重心を G とすると,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \left(\frac{\text{ ⑤ }}{16} \vec{a} + \frac{\text{ ⑥ }}{9} \vec{b} \right)$$

と表される。点 G が $\triangle OAB$ の周または内部にあるような k の範囲は

$$0 < k \leq \frac{\text{ ⑦ }}{41}$$

である。

〔Ⅲ〕 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ の増減を調べ、極値を求めよ。

(2) 曲線 $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ 上の点 $\left(-1, \frac{11}{3}\right)$ における接線の方程式を求めよ。

また、この接線と曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(以上)

