

2019 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔 I 〕 関数 $f(x) = \frac{x^3 + ax}{x^2 + 3}$ があり、 $x = 1$ で極値をもつ。ただし、 a は定数である。

また、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。次の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - x\}$ を求めよ。
- (3) $f(x)$ の極値を求め、増減表をかけ。ただし、曲線の凹凸については調べる必要はない。
- (4) C と x 軸の $x \geq 0$ の部分で囲まれる図形の面積を求めよ。

〔Ⅱ〕 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad b_1 = 5a_1a_2, \quad \begin{cases} a_n - a_{n+1} = 2a_na_{n+1} \\ b_{n+1} - b_n = 4a_na_{n+1}a_{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ c_n = \frac{1}{a_n} \end{cases}$$

このとき、次の をうめよ。ただし、 ③ 以外は数値をうめよ。

(1) $b_1 =$ ① $である。$

(2) $c_{n+1} = c_n +$ ② $と表される。また、$ $S = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \dots + c_n^2$

$を n を用いて表すと、$ $S = \frac{n}{3} \left(\right.$ ③ $\left. \right)$ $である。$

(3) $\sum_{k=1}^{30} a_k a_{k+1} =$ ④ $である。$

(4) $a_na_{n+1}a_{n+2} =$ ⑤ $(a_na_{n+1} - a_{n+1}a_{n+2})$ $を利用すると、$

$\sum_{k=1}^{30} b_k =$ ⑥ $である。$

〔Ⅲ〕 O を原点とする座標平面上に、2つの焦点 $F_1(p, 0)$, $F_2(-p, 0)$ ($p > 0$) から

の距離の和が一定である楕円 C があり、 C は2点 $(-3, 0)$, $(\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3})$

を通る。このとき、次の をうめよ。

(1) C の方程式は ① $= 1$ である。

(2) $p =$ ② である。

(3) k を定数とする。 C と直線 $y = \frac{1}{2}x + k$ が異なる2つの共有点をもつときの
 k の値の範囲は ③ である。

(4) F_1, F_2 を焦点とし、2本の漸近線 $y = \pm \frac{1}{2}x$ をもつ双曲線の方程式は
 ④ $= 1$ である。

(5) (4) の双曲線と C の共有点のうち、第1象限にあるものを A とする。 A の座
標は ⑤ であり、 $\angle OAF_1 =$ ⑥ $^\circ$ である。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

- (1) 原点を出発して数直線上を移動する点 P がある。さいころを 1 回投げて、奇数の目が出たら P は正の方向に 3 だけ進み、偶数の目が出たら P は負の方向に 2 だけ進む。さいころを 10 回投げたとき、 P が原点にある確率は

① である。

- (2) $k > 0$ とする。 O を原点とする座標平面上に傾きが k で、点 $(2, 0)$ を通る直線がある。この直線と点 O の距離が 1 以上 $\sqrt{2}$ 以下であるような k の値の範囲は ② である。

- (3) $t = \log_2 x$ とする。 $\log_x 8$ を t を用いて表すと、 $\frac{\text{③}}{t}$ である。また、 $x > 1$ のとき、 $\log_x 8 + \log_2 x^2$ の最小値は ④ である。

- (4) 座標空間に 3 点 $A(1, 2, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(0, -1, a)$ があり、 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角は 90° である。 $a = \text{⑤}$ であり、点 $P(2, 3, b)$ が平面 ABC 上にあるとき、 $b = \text{⑥}$ である。

- (5) 複素数平面上に 3 点 $A(-2)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする正三角形があり、 $O(0)$ がその重心であるとき、 $\beta\gamma = \text{⑦}$ である。

(以上)

