

2019 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔 I 〕 a を定数とし、関数 $f(x) = x(e^{-x^2} + a)$ の変曲点はすべて x 軸上にあるとする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の漸近線を求めよ。必要なら $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$ を用いてもよい。
- (3) $f'(x) = 0$ を満たす実数解はちょうど 2 個あり、それらを α, β ($\alpha < 0 < \beta$) とする。曲線 $y = f(x)$ の概形と (2) で求めた漸近線を解答欄の座標平面上にかけ。そのとき必要なら α, β を用いてよい。ただし、曲線の凹凸は調べなくてもよい。
- (4) x 軸と曲線 $y = f(x)$ とで囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

〔Ⅱ〕 次の をうめよ。

座標平面と座標空間において、点の座標すべてが整数である点を格子点と呼ぶことにする。 m を正の整数とする。座標平面において、 $m = 1, 2, \dots$ に対して、連立不等式 $x + y \leq m, x \geq 0, y \geq 0$ で表される領域に含まれる格子点 (x, y) の個数を a_m で表す。 $m = 1$ のとき、 a_1 は ① である。 $x + y = m + 1, x \geq 0, y \geq 0$ で表される線分上の格子点の個数は ② 個だから、 a_{m+1} を a_m と m で表すと、 $a_{m+1} =$ ③ である。この漸化式から a_m を求めると、 $a_m =$ ④ である。

n を正の整数とする。座標空間において、 $x + y + z \leq n, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ で定義された立体を V_n で表す。 $0 \leq k \leq n$ である整数 k に対して、 xy 平面と平行な平面 $z = k$ 上の格子点であり、かつ V_n に含まれる格子点 (x, y, z) の個数は ⑤ 個である。よって V_n に含まれる格子点の個数 b_n は n の 1 次式の積で表せて、 $b_n = (n + 1) \cdot$ ⑥ であることがわかる。このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} + \dots$$

の値は ⑦ である。

〔Ⅲ〕 四面体 $OABC$ と $0 < x < 1$ に対して、辺 OA を $(1-x):x$ に内分する点を P 、
 辺 BC を $x:(1-x)$ に内分する点を Q 、線分 PQ を $x:(1-x)$ に内分する点を
 R とする。ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ で表す。こ
 のとき次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OR}$ を、 x と $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) 四面体 $OABC$ の底面 ABC 上の点を S とする。ベクトル $\overrightarrow{OS}$ を、実数 s, t, u を用いて $\overrightarrow{OS} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ と表したとき、 $s + t + u = 1$ を示せ。
- (3) 直線 OR と四面体 $OABC$ の底面 ABC の交点を T とする。このとき実数 k を用いて $\overrightarrow{OT} = k\overrightarrow{OR}$ と表すことができる。 k を x を用いて表せ。さらに x が $0 < x < 1$ の範囲を動くとき、 k の最大値を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

- (1) 座標平面上に 2 点 $A(2, 1)$, $B(a, 2)$ をとる。線分 AB の垂直二等分線が $(1, 3)$

を通るような a の値は ① である。

- (2) $-\pi < \theta < \pi$ において, $\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = -1$ を満たす θ は ② である。

- (3) 極座標 (r, θ) に関する極方程式

$$r(1 + 2\sin \theta) = 3$$

を直交座標 (x, y) に関する方程式で表すと

$$\text{③ } x^2 + (y - 2)^2 = 1$$

である。

- (4) $-2, 1, 1, 2, 4, 4$ と書かれたさいころを 3 回投げ, 出た目の数を順に $a, b,$

c とする。積 abc が 8 となる確率は ④ である。

- (5) $9^n + 55$ が平方数であるような自然数 n のうちで最大の n は ⑤ である。

ここで平方数とは, 自然数の 2 乗で表される数のことである。

(以上)

