

2019 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 90 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔 I 〕 $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ とおく。曲線 $C: y = f(x)$ 上の 2 点 $A\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $B(2, 4)$ を通る直線を $l: y = g(x)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $g(x)$ を求めよ。
- (2) $-1 \leq x \leq 2$ において $g(x) \geq f(x)$ が成り立つことを示せ。
- (3) 直線 l と平行で y 切片が k の直線と C の交点の数を調べよ。

〔Ⅱ〕 初項 a_1 , 公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ がある。初項から第 n 項までの和を S_n , 第 $(n+1)$ 項から第 $(2n)$ 項までの和を T_n とする。次の問いに答えよ。

(1) S_n と T_n を a_1 , d , n を用いて表せ。

(2) $T_n = 2S_n + n^2$ が成り立っているとき, a_1 と d を求めよ。また, このときの一般項 a_n を n を用いて表せ。

(3) (2) の条件のもとで, すべての自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ。

〔Ⅲ〕 平面上に三角形 OAB があり、 $OA = \sqrt{13}$ 、 $AB = \sqrt{3}$ 、 $BO = 4$ であるとする。

また、O を中心とし OB を半径とする円がある。さらに、AB を 4:3 で外分する点 C とする (C は AB の延長線上の点で、 $AC:BC = 4:3$)。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくとき、次の をうめよ。

(1) $\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表すと ① である。

(2) 直線 AC と円との B とは異なる交点を D とする。このとき、 $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表すと ② となる。

(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は ③ である。

(4) 直線 OC と円との 2 つの交点を、点 C に近い方を E、遠い方を F とする。
このとき、 $\overrightarrow{OE}$ 、 $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表すと、それぞれ ④ , ⑤ である。

〔Ⅳ〕 さいころを2回振って出た目を順に m , n とする。次の をうめよ。

(1) $\log_2 m - \log_2 n = 1$ となる確率は ① である。

(2) $2^m \times 4^n > 32$ となる確率は ② である。

(3) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ となる確率は ③ である。

(4) $\sqrt{m} + \sqrt{n} > \sqrt{m+n}$ となる確率は ④ である。

(5) $(n-m)\cos((n-m)\pi) < 0$ となる確率は ⑤ である。

(以上)

