

〔I〕

(1)

三角関数の合成の公式を用いて

$$t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

となる。このとき

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi$$

であるから、 t の取りうる値の範囲は

$$-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

(2)

$t = \sin x - \cos x$ より、両辺を二乗して

$$t^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - t^2$$

であるから、 $f(x)$ を t で表すと

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2}(\sin x - \cos x) + 1 - 2 \sin x \cos x \\ &= \sqrt{2}t + 1 - (1 - t^2) \\ &= t^2 + \sqrt{2}t \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = t^2 + \sqrt{2}t$$

(3)

(2)より

$$f(x) = t^2 + \sqrt{2}t = \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2} \quad (-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$$

であるから、 $f(x)$ の最小値は

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi \quad \left(\because -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12}, \frac{17}{12}\pi$$

のとき、 $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$ をとる。また、 $f(x)$ の最大値は

$$t = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \left(\because -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}\pi$$

のとき、 $f(\sqrt{2}) = 4$ をとる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{\pi}{12}, \frac{17}{12}\pi \text{ のとき最小値 } -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{3}{4}\pi \text{ のとき最大値 } 4$$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤
$\frac{n(n+1)}{2}$	4	$3b_n+2$	3^n-1	475

〔解説〕

${}_{n+1}C_2 = \frac{n(n+1)}{2}$ より、数列 $\{a_n\}$ は

$$\frac{a_{n+1}}{n} - \frac{3a_n}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow (n+1)a_{n+1} = 3na_n + 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。 $a_1 = 2$ であるから、 $\textcircled{1}$ に $n=1$ を代入して

$$2a_2 = 3a_1 + 2 \Leftrightarrow a_2 = 4$$

である。 $na_n = b_n$ とおくと、 $\textcircled{1}$ より

$$b_{n+1} = 3b_n + 2 \Leftrightarrow (b_{n+1} + 1) = 3(b_n + 1)$$

である。数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $1 \cdot 2 + 1 = 3$ 、公比 3 の等比数列であるから

$$b_n + 1 = 3^n \Leftrightarrow b_n = 3^n - 1$$

である。したがって、 $a_n = \frac{3^n - 1}{n}$ である。このとき、 3^n が 10 の倍数であると仮定すると、自

然数 k を用いて $3^n = 10^k$ と表せる。しかし、左辺は 3 の倍数であるのに対し、右辺は 3 の倍数ではないから不適である。したがって、 3^n は 10 の倍数ではないから、 $3^n - 1$ と 3^n の桁数は一

致する。よって、 a_{1000} の桁数は $\frac{3^{1000}}{1000}$ と一致する。このとき

$$\begin{aligned} \log_{10} \frac{3^{1000}}{1000} &= 1000 \log_{10} 3 - 3 \\ &= 477.1 - 3 \\ &= 474.1 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} 474 &< \log_{10} \frac{3^{1000}}{1000} < 475 \\ \Leftrightarrow 10^{474} &< \frac{3^{1000}}{1000} < 10^{475} \end{aligned}$$

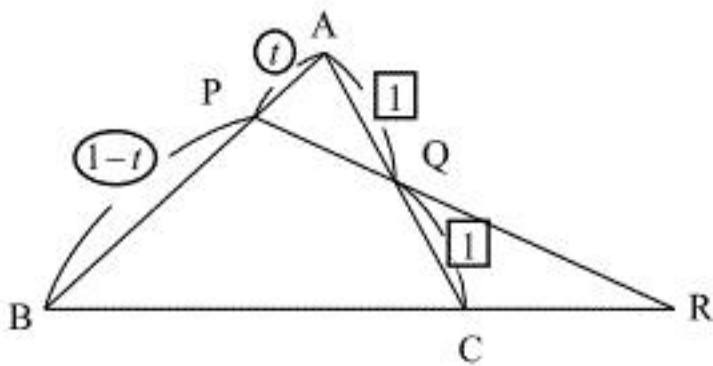
となる。したがって、 $\frac{3^{1000}}{1000}$ と a_{1000} の桁数は 475 桁である。よって、 a_{1000} を超えない最大の整数は 475 桁の整数である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
$1-t-\alpha$	$-\beta t$	$\frac{1}{2}\beta$	$1-t$	$2-2t$	$\frac{1}{4}$

〔解説〕



P は辺 AB を $t:1-t$ に内分する点で、Q は AC の中点であるから

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{b}, \overrightarrow{PB} = (1-t)\vec{b}, \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QC} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

である。よって、実数 α, β を用いて $\overrightarrow{BP} = \alpha\overrightarrow{BC} = \alpha(\vec{c}-\vec{b})$, $\overrightarrow{PR} = \beta\overrightarrow{PQ}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BR} \\ &= (1-t)\vec{b} + \alpha(\vec{c}-\vec{b}) \\ &= (1-t-\alpha)\vec{b} + \alpha\vec{c} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= \beta\overrightarrow{PQ} \\ &= \beta(\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}) \\ &= \beta\left(\frac{1}{2}\vec{c} - t\vec{b}\right) \\ &= -\beta t\vec{b} + \frac{1}{2}\beta\vec{c} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

である。 $\vec{b}$ と $\vec{c}$ は1次独立であるから、①、②の係数を比較して

$$\begin{cases} 1-t-\alpha = -\beta t \\ \alpha = \frac{1}{2}\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1-t}{1-2t} \\ \beta = \frac{2-2t}{1-2t} \end{cases}$$

である。 $\triangle QCR$ の面積が $\triangle QAP$ の面積の2倍となるのは、 $AQ=QC$ より $QR=2PQ$ となるときである。よって、 $\overrightarrow{PR} = 3\overrightarrow{PQ}$ より $\beta=3$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{2-2t}{1-2t} &= 3 \\ \Leftrightarrow 2-2t &= 3-6t \\ \Leftrightarrow 4t &= 1 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。