

【Ⅰ】

(1)

点 A, B の座標をそれぞれ $A\left(\alpha, -a\alpha^2 + a - \frac{1}{4a}\right)$, $B\left(\beta, -a\beta^2 + a - \frac{1}{4a}\right)$ ($\alpha < \beta$) とする。ここで

C_1 について

$$y' = -2a\alpha$$

より A を通る接線の方程式は

$$y = -2a\alpha\left(x - \alpha\right) - a\alpha^2 + a - \frac{1}{4a} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。同様にして B を通る接線の方程式は

$$y = -2a\beta\left(x - \beta\right) - a\beta^2 + a - \frac{1}{4a} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となり、以上 2 式から y を消去して、点 P の x 座標は

$$\begin{aligned} -2a\alpha\left(x - \alpha\right) - a\alpha^2 + a - \frac{1}{4a} &= -2a\beta\left(x - \beta\right) - a\beta^2 + a - \frac{1}{4a} \\ \Leftrightarrow 2a(\beta - \alpha)x &= a(\beta^2 - \alpha^2) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (\because \alpha \neq \beta) \end{aligned}$$

となる。ここで $\angle P = \frac{\pi}{2}$ であることから①, ②の傾きを考えて

$$\begin{aligned} (-2a\alpha) \cdot (-2a\beta) &= -1 \\ \Leftrightarrow \alpha\beta &= -\frac{1}{4a^2} \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

を得る。よって点 P の y 座標は、①に $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ を代入することで

$$\begin{aligned} y &= -2a\alpha\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) - a\alpha^2 + a - \frac{1}{4a} \\ &= -a\alpha\beta + a - \frac{1}{4a} \end{aligned}$$

となり、③より、

$$\begin{aligned} y &= -a\alpha\beta + a - \frac{1}{4a} \\ &= -a\left(-\frac{1}{4a^2}\right) + a - \frac{1}{4a} \\ &= a \end{aligned}$$

となる。また $\triangle PAB$ が $PA = PB$ となる二等辺三角形であることから

$$\begin{aligned} PA^2 &= PB^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 + \left(-a\alpha^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 &= \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 + \left(-a\beta^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \left(a\alpha^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 &= \left(a\beta^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 \\ \Leftrightarrow a\alpha^2 + \frac{1}{4a} &= a\beta^2 + \frac{1}{4a} \quad \left(\because a\alpha^2 + \frac{1}{4a} > 0, a\beta^2 + \frac{1}{4a} > 0, a > 0\right) \\ \Leftrightarrow \alpha^2 &= \beta^2 \\ \Leftrightarrow \alpha &= -\beta \quad (\because \alpha \neq \beta) \end{aligned}$$

となる。よって交点 P の x 座標は

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} = 0$$

となる。

(答) $P(0, a)$

(2)

③について $\alpha = -\beta$ であることから

$$\begin{aligned} -\alpha^2 &= -\frac{1}{4a^2} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \pm \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

となり $\alpha < \beta$ に注意すれば

$$\alpha = -\frac{1}{2a}, \beta = \frac{1}{2a}$$

を得る。これより $A\left(-\frac{1}{2a}, a - \frac{1}{2a}\right)$, $B\left(\frac{1}{2a}, a - \frac{1}{2a}\right)$ と求まる。2 点 A, B は y 軸に関して対称であり、 $P(0, a)$ を通ることから、 $P(0, a)$ を頂点に持つ放物線となり、その方程式は実数 t を用いて

$$y = tx^2 + a$$

と書ける。よって $\left(\frac{1}{2a}, a - \frac{1}{2a}\right)$ を通ることから

$$\begin{aligned} a - \frac{1}{2a} &= t\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + a \\ \Leftrightarrow t &= -2a \end{aligned}$$

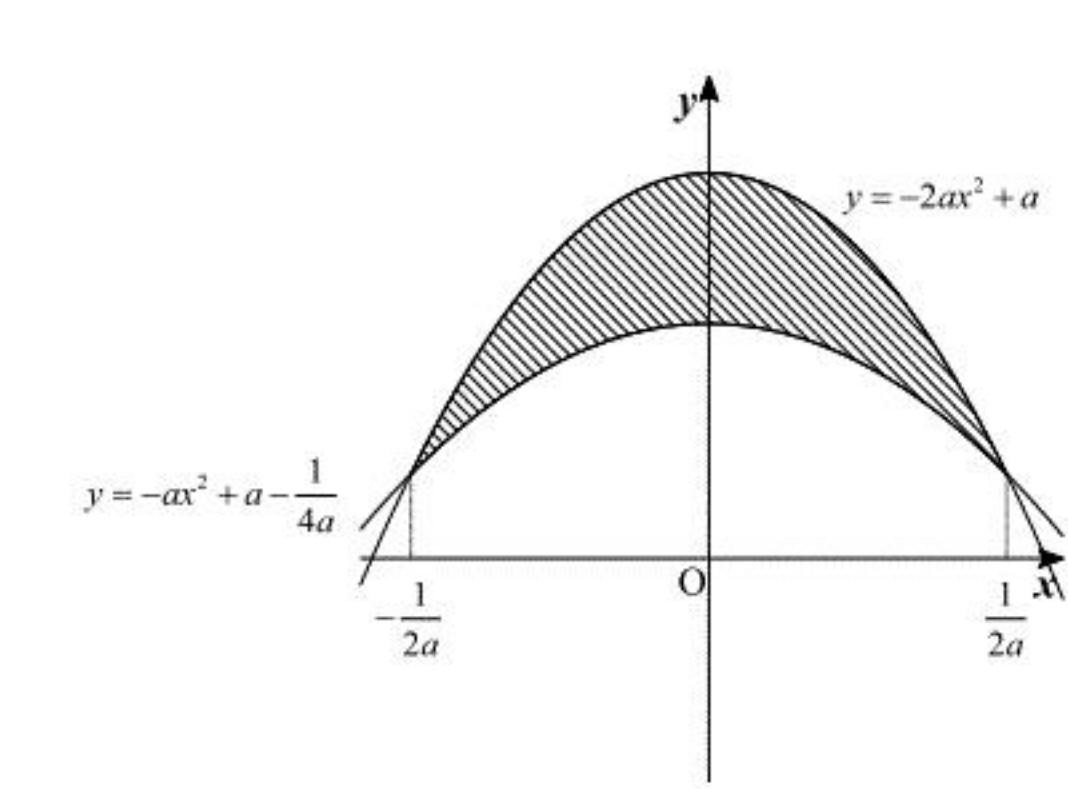
となり放物線 C_2 の方程式は

$$y = -2ax^2 + a$$

となる。

(答) $y = -2ax^2 + a$

(3)



放物線 C_1, C_2 は 2 点 A, B で交わるので、求める面積は上図斜線部の面積となり

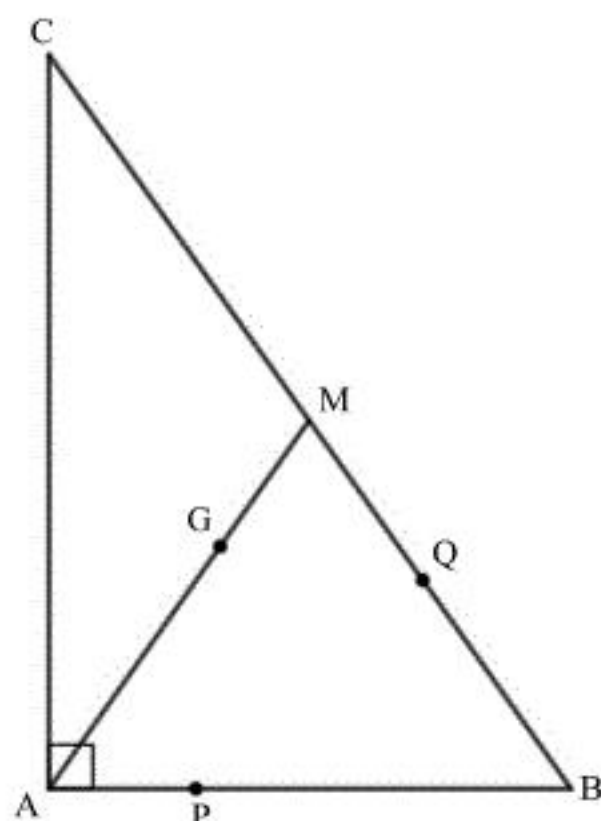
$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} \left\{ (-2ax^2 + a) - \left(-ax^2 + a - \frac{1}{4a}\right) \right\} dx &= 2 \int_0^{\frac{1}{2a}} \left(-ax^2 + \frac{1}{4a}\right) dx \\ &= 2 \left[-\frac{a}{3}x^3 + \frac{1}{4a}x \right]_0^{\frac{1}{2a}} \\ &= \frac{1}{6a^2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{6a^2}$

〔Ⅱ〕

(1)



点Pと点Qについて

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AQ} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} \\ &= (1-2t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

と書ける。ここで $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ より、

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

であり、 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PQ}$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + (1-2t)|\overrightarrow{AB}|^2 &= 0 \quad (\because \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0) \\ \Leftrightarrow (1-2t)|\overrightarrow{AB}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{1}{2}$$

(2)

辺ABの中点をMとして

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

となる。ここで点Gは線分AMを2:1に内分する点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \\ &= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

(3)

背理法を利用して直線PGが点Gを通らないことを証明する。 $\overrightarrow{PQ}$ が点Gを通ると仮定すると実数 k を用いて

$$\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PG}$$

と表せる。ここで

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= k\overrightarrow{PG} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}) &= k(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AP}) \\ \Leftrightarrow (1-2t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} &= k\left(\frac{1}{3} - t\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}k\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

となる。ここで $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は $\vec{0}$ でなく互いに平行でないから係数比較を行って

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1-2t = k\left(\frac{1}{3} - t\right) \\ t = \frac{1}{3}k \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2t = 3t\left(\frac{1}{3} - t\right) \\ t = \frac{1}{3}k \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 - 3t + 1 = 0 \\ t = \frac{1}{3}k \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} 3t^2 - 3t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{6} \end{aligned}$$

より、 t は実数とならないことから仮定は誤りで、直線PQが点Gを通ることはない。

(証明終)

【Ⅲ】

〔解答〕

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{54}$ ③ $\frac{23}{24}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

〔解説〕

(1)

OA = OB が成り立てば良いので

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2} &= \sqrt{(-b)^2+c^2} \\ \Leftrightarrow a=c \quad (\because a>0, b>0, c>0)\end{aligned}$$

となり、これを満たす組は $(a, c) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ の 6 組だから求める確率は、 a, c の組み合わせのみを考えて

$$\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

となる。

(2)

AP = BP が成り立てば良いので

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-1)^2+b^2} &= \sqrt{(-b-1)^2+c^2} \\ \Leftrightarrow (a-1)^2+b^2 &= (-b-1)^2+c^2 \quad (\because a>0, b>0, c>0) \\ \Leftrightarrow a(a-2) &= c^2+2b\end{aligned}$$

となる。ここで $a(a-2) > 0$ より $a = 3, 4, 5, 6$ のいずれかである。以降 a の値で場合分けを行う。

[1] $a = 3$ のとき

$$\begin{aligned}3 &= c^2+2b \\ \Leftrightarrow 2b &= 3-c^2 > 0\end{aligned}$$

より $c = 1$ となり

$$\begin{aligned}2b &= 3-1 \\ \Leftrightarrow b &= 1\end{aligned}$$

と求まる。よってこの場合、条件を満たすのは $(a, b, c) = (3, 1, 1)$ の 1 通りである。

[2] $a = 4$ のとき

$$\begin{aligned}8 &= c^2+2b \\ \Leftrightarrow 2b &= 8-c^2\end{aligned}$$

となる。ここで $8-c^2 > 0$ で、 $2b$ が偶数であることから c が偶数となることに注意すれば、式を満たす c は $c = 2$ である。このとき

$$\begin{aligned}2b &= 8-2^2 \\ \Leftrightarrow b &= 2\end{aligned}$$

となり、条件を満たすのは、 $(a, b, c) = (4, 2, 2)$ の 1 通りである。

[3] $a = 5$ のとき

$$\begin{aligned}15 &= c^2+2b \\ \Leftrightarrow 2b &= 15-c^2\end{aligned}$$

である。ここで $15-c^2 > 0$ で、 $2b$ が偶数であることから c が奇数となることに注意すれば、式を満たす c は $c = 3$ である。このとき

$$\begin{aligned}2b &= 15-3^2 \\ \Leftrightarrow b &= 3\end{aligned}$$

となり、条件を満たすのは、 $(a, b, c) = (5, 3, 3)$ の 1 通りである。

[4] $a = 6$ のとき

$$\begin{aligned}24 &= c^2+2b \\ \Leftrightarrow 2b &= 24-c^2\end{aligned}$$

である。ここで $24-c^2 > 0$ で、 $2b$ が偶数であることから c が偶数となることに注意すれば、式を満たす c は $c = 4$ である。このとき

$$\begin{aligned}2b &= 24-4^2 \\ \Leftrightarrow b &= 4\end{aligned}$$

となり、条件を満たすのは、 $(a, b, c) = (6, 4, 4)$ の 1 通りである。

以上[1]から[4]より条件を満たす組は 4 通りとなる。 a, b, c の組み合わせが 6^3 通りあることから求める確率は

$$\frac{4}{6^3} = \frac{1}{54}$$

となる。

(3)

$\triangle OAB$ の面積が 3 未満になる場合を考える。このとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} |ac-b \cdot (-b)| &< 3 \\ \Leftrightarrow |ac+b^2| &< 6 \\ \Leftrightarrow ac+b^2 &< 6 \quad (\because ac+b^2 > 0)\end{aligned}$$

となる。 $ac+b^2 \geq 2$ に注意して、以降 $ac+b^2$ の値で場合分けを行う。

[1] $ac+b^2 = 2$ のとき

$$ac = 2-b^2 > 0$$

より $b = 1$ であり、このとき $ac = 1$ だから条件を満たす組は

$$(a, b, c) = (1, 1, 1)$$

の 1 通りとなる。

[2] $ac+b^2 = 3$ のとき

$$ac = 3-b^2 > 0$$

より $b = 1$ であり、このとき $ac = 2$ だから条件を満たす組は

$$(a, b, c) = (2, 1, 1), (1, 1, 2)$$

の 2 通りとなる。

[3] $ac+b^2 = 4$ のとき

$$ac = 4-b^2 > 0$$

より $b = 1$ であり、このとき $ac = 3$ だから条件を満たす組は

$$(a, b, c) = (3, 1, 1), (1, 1, 3)$$

の 2 通りとなる。

[4] $ac+b^2 = 5$ のとき

$$ac = 5-b^2 > 0$$

より $b = 1, 2$ であり、このとき $ac = 1, 4$ だから条件を満たす組は

$$(a, b, c) = (4, 1, 1), (1, 1, 4), (2, 1, 2), (1, 2, 1)$$

の 4 通りとなる。

以上[1]から[4]より条件を満たす組は 9 通りある。余事象の確率を考えることで求める確率は

$$1 - \frac{9}{6^3} = \frac{23}{24}$$

となる。

(4)

$A(a, b)$ を頂点に持つ放物線の方程式は実数 t を用いて

$$y = t(x-a)^2 + b$$

と書くことができ、これが $B(-b, c)$ を通るから

$$\begin{aligned}c &= t(-b-a)^2 + b \\ \Leftrightarrow t &= \frac{c-b}{(a+b)^2}\end{aligned}$$

となる。ただし $b \neq c$ である。よって x 軸との交点は $y = 0$ として

$$\begin{aligned}0 &= \frac{c-b}{(a+b)^2} (x-a)^2 + b \\ \Leftrightarrow (x-a)^2 &= \frac{b(a+b)^2}{b-c}\end{aligned}$$

となる。 x が 2 つの異なる実数解を持てばよいので、 $b > c$ であればよい。このような b, c の選び方は、1 から 6 の中から異なる 2 数を選ぶ組み合わせを考えることで ${}_6C_2$ 通りある。よって求める確率は

$$\frac{{}_6C_2}{6^2} = \frac{5}{12}$$

である。

(4)

求める軌跡上の点を $Q(x, y)$ とする。このとき $AQ = BQ$ であることから、その方程式は

$$\begin{aligned}AQ &= BQ \\ \Leftrightarrow AQ^2 &= BQ^2 \\ \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 &= (x+b)^2 + (y-c)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 - c^2 &= 2(a+b)x + 2(b-c)y\end{aligned}$$

と求まる。ここで、この軌跡が原点を通るとき、 $x = y = 0$ を代入することで

$$\begin{aligned}a^2 - c^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= c \quad (\because a>0, c>0)\end{aligned}$$

を得る。これを満たす組は、(1)と同様にして 6 通りある。よって求める確率は

$$\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

となる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

① 24 ② 48 ③ $4(n+1)(n+2)$ ④ $\frac{4}{3}n(n^2+6n+11)$ ⑤ $\frac{n}{8(n+2)}$ ⑥ $23 < n < 48$

〔解説〕

(1)

$$\sum_{k=1}^n ka_k = n(n+1)(n+2)(n+3) \qquad \cdots \textcircled{1}$$

に $n=1$ を代入して

$$a_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

となり、 $n=2$ のときはこれを用いて

$$\begin{aligned} 2a_2 + 1 \cdot a_1 &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ \Leftrightarrow a_2 &= 48 \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} na_n &= \sum_{k=1}^n ka_k - \sum_{k=1}^{n-1} ka_k \\ &= n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2) \\ &= 4n(n+1)(n+2) \\ \therefore a_n &= 4(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

である。これは $n=1$ としても

$$a_1 = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

より成立するので

$$a_n = 4(n+1)(n+2)$$

である。

(3)

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

について

$$(n+1)(n+2) = \frac{1}{3} \{ (n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2) \}$$

であることに注意すれば

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= 4 \sum_{k=1}^n (k+1)(k+2) \\ &= \frac{4}{3} \sum_{k=1}^n \{ (k+1)(k+2)(k+3) - k(k+1)(k+2) \} \\ &= \frac{4}{3} [(2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3) + (3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4) + \cdots + \{ (n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2) \}] \\ &= \frac{4}{3} \{ -6 + (n+1)(n+2)(n+3) \} \\ &= \frac{4}{3} n(n^2 + 6n + 11) \end{aligned}$$

と求まる。

(4)

T_n については

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{n}{8(n+2)} \end{aligned}$$

となる。

(5)

$$\begin{aligned} \frac{23}{200} < T_n < \frac{3}{25} \\ \Leftrightarrow \frac{23}{200} < \frac{n}{8(n+2)} < \frac{3}{25} \end{aligned}$$

について、左辺の不等式は

$$\begin{aligned} \frac{23}{200} &< \frac{n}{8(n+2)} \\ \Leftrightarrow 184n + 368 &< 200n \\ \Leftrightarrow n &> 23 \end{aligned}$$

となる。右辺については

$$\begin{aligned} \frac{n}{8(n+2)} &< \frac{3}{25} \\ \Leftrightarrow 25n &< 24n + 48 \\ \Leftrightarrow n &< 48 \end{aligned}$$

を得る。これらより求める n の範囲は

$$23 < n < 48$$

となる。