

【I】

(1)

関数 $f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + a$ とすると,

$$f'(x) = 4x^3 - 3x$$

であり, $f'(x) = 1$ となる x は

$$4x^3 - 3x = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}, 1$$

となる。

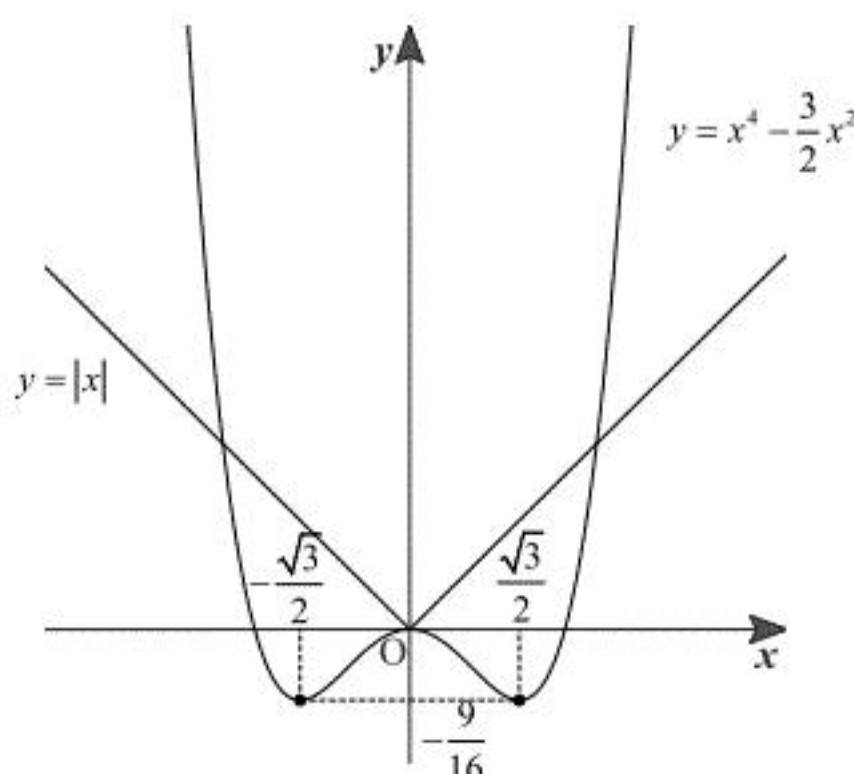
(答) $x = -\frac{1}{2}, 1$

(2)

$a = 0$ のとき, $f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2$, $f'(x) = 4x^3 - 3x$ であるから, 増減表は以下の通りになる。

x	...	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{9}{16}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{16}$	$\nearrow$

また, このときの C と l のグラフは以下の通りになる。



上図より, C と l の共有点の個数は 3 個である。

(答) 3 個

(3)

C と l は偶関数であるので, $x = p$ ($p > 0$) で C と l が交わる時, $x = -p$ でも交わる。よって, C と l の共有点が 2 個となるための a の条件は, C と l が $x > 0$ で共有点を 1 個持つ条件と言い換えられる。 $y = f(x)$ と $y = |x|$ の共有点の個数は,

$$x^4 - \frac{3}{2}x^2 + a = x \Leftrightarrow -x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x = a$$

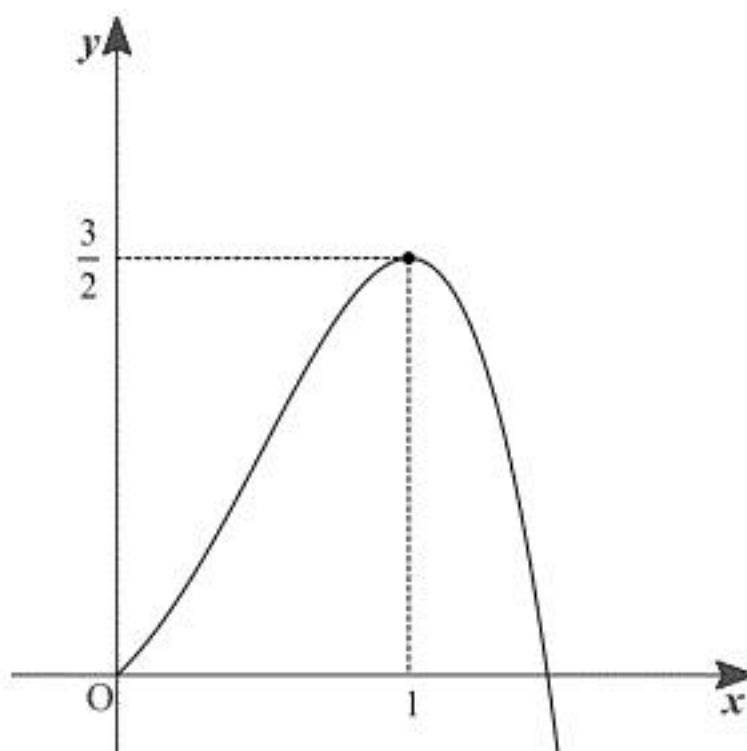
より, $g(x) = -x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x$ とすると, $y = g(x)$ と $y = a$ の共有点の個数と等しくなる。ここで,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -4x^3 + 3x + 1 \\ &= -(x-1)(2x+1)^2 \end{aligned}$$

であるから, $g(x)$ の $x > 0$ における増減表は以下の通りになる。

x	0	...	1	...
$g'(x)$	0	+	0	-
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$

以上より, $y = g(x)$ の $x > 0$ におけるグラフは以下の通りになる。



C と l の共有点が, $x > 0$ においてちょうど 1 個となる a の条件は,

$$a < 0, a = \frac{3}{2}$$

と分かる。

(答) $a < 0, a = \frac{3}{2}$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
$a+c$	$b-d$	$b+d$	$a-c$	b	a	$i\bar{\alpha}$	i

〔解説〕

$\alpha = a+bi$, $\beta = c+di$, $z = x+yi$, $\bar{z} = x-yi$ を代入すると,

$$\begin{aligned} (a+bi)(x+yi) + (c+di)(x-yi) + 1+i &= 0 \\ \Leftrightarrow (ax-by+cx+dy+1) + (ay+bx-cy+dx+1)i &= 0 \end{aligned}$$

となり, a, b, c, d, x, y は実数であるので両辺の実部、虚部を比較すると,

$$ax-by+cx+dy+1=0 \Leftrightarrow (a+c)x-(b-d)y+1=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$ay+bx-cy+dx+1=0 \Leftrightarrow (b+d)x+(a-c)y+1=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が得られる。集合 V がある直線上の点全体の集合と等しくなるために, ①, ②が一致することが必要であるから,

$$\begin{aligned} (a+c):(-b+d):1 &= (b+d):(a-c):1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=b+d \\ -b+d=a-c \end{cases} \\ \therefore c=b, d=a \end{aligned}$$

となる。このとき, $(a, b) = (0, 0)$ とすると $a=b=c=d=0$ となり, ①, ②は直線の式を表さないため不適である。よって, $(a, b) \neq (0, 0)$, $c=b, d=a$ である。また,

$(a, b) \neq (0, 0)$, $c=b, d=a$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow (a+b)x+(-b+a)y+1=0$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow (b+a)x+(a-b)y+1=0$$

であり, ①, ②は一致して, 直線を表すので, $(a, b) \neq (0, 0)$, $c=b, d=a$ は十分条件と言える。以上より, 集合 V がある直線上の点全体の集合と等しくなるための必要十分条件は $(a, b) \neq (0, 0)$, $c=b, d=a$ となる。この条件を α, β を用いて表すと,

$$\alpha \neq 0, \beta = b+ai = i\bar{\alpha}$$

となる。この条件が成立するとき, V は

$$\alpha z + i\bar{\alpha}z + 1+i = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

を満たす。ここで, V の点に $1-i$ をかけて得られる点全体が作る集合 W の点 w とすると,

$$\begin{aligned} w &= (1-i)z \\ \Leftrightarrow z &= \frac{w}{1-i} \end{aligned}$$

より, これを③の式に代入すると,

$$\frac{\alpha w}{1-i} + \frac{i\bar{\alpha}w}{1+i} + 1+i = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。 V, W の共有点が i となるから, $z=i, w=i$ をそれぞれ③, ④に代入して式を整理すると,

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow (a+bi)i + i(a-bi)(-i) + 1+i = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+1) + (a-b+1)i = 0$$

$$\therefore a-b+1=0$$

$$\textcircled{4} \Leftrightarrow \frac{(a+bi)i}{1-i} + \frac{i(a-bi)}{1+i}(-i) + 1+i = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2b+2) + (-2b+2)i = 0$$

$$\therefore b=1$$

となるから, $a=0, b=1$ であり, $\alpha=i$ である。

〔Ⅲ〕

(1)

曲線 C は媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin^3 t + \cos^3 t \end{cases}$$

であるから、それぞれを t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \cos t$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 3 \cos t \sin^2 t - 3 \sin t \cos^2 t \\ &= 3 \cos t \sin t (\sin t - \cos t) \\ &= 3\sqrt{2} \cos t \sin t \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

となり、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = 3 \sin t (\sin t - \cos t)$$

である。

(答) $\frac{dy}{dx} = 3 \sin t (\sin t - \cos t)$

(2)

(1)より、 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ において、 $\frac{dx}{dt} > 0$ がつねに成り立ち、

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow \cos t \sin t \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

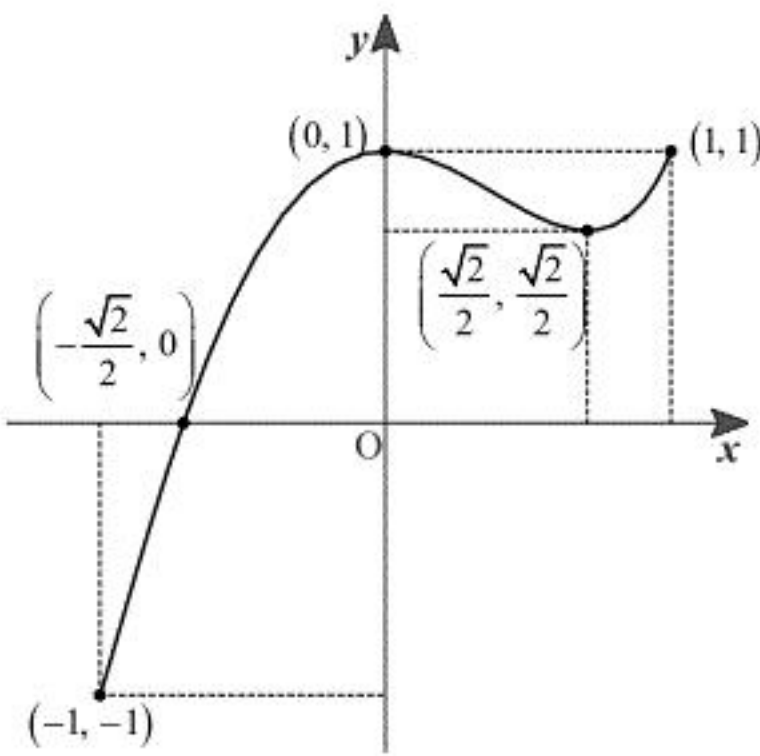
$$\therefore t = 0, \frac{\pi}{4}$$

となるから、増減表は以下の通りである。

t	$-\frac{\pi}{2}$	...	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		+		+		+	
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	0	+	
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\nearrow$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\searrow$	$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$	$\nearrow$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

また、 C と x 軸の交点は、 $t = -\frac{\pi}{4}$ のときであるから、その座標は $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ である。よって

C の概形は以下の通りになる。



(答) 前図

(3)

倍角の公式より、

$$\begin{aligned} \cos 2t &= 2 \cos^2 t - 1 \\ \cos 4t &= 2 \cos^2 2t - 1 \\ &= 2(2 \cos^2 t - 1)^2 - 1 \\ &= 8 \cos^4 t - 8 \cos^2 t + 1 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos^4 t &= \frac{1}{8} (\cos 4t + 8 \cos^2 t - 1) \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4t + 4 \cos 2t + 4 - 1) \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4t + 4 \cos 2t + 3) \\ &= \frac{1}{8} \cos 4t + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \frac{1}{8}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{8}$

(4)

求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t \cos t + \cos^4 t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3 t \cos t + \frac{1}{8} \cos 4t + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{3}{8} \right) dt \quad (\because (3)) \\ &= \left[\frac{1}{4} \sin^4 t + \frac{1}{32} \sin 4t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{3}{8} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{16} \pi \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} \pi$

〔Ⅳ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
2	$\left(\frac{4}{13}, \frac{6}{13}\right)$	$2n-1$	n^2-2n+2	70	$t=\frac{4}{3}$

〔解説〕

(1)

真数条件より、 $x+2>0$ かつ $x-1>0$ であるから、 $x>1$ となる。与式を整理すると、

$$\begin{aligned}\log_a(x+2)+\log_a(x-1)&=\log_a4 \\ \Leftrightarrow \log_a(x+2)+\frac{\log_a(x-1)}{\log_a a^2}&=\log_a4 \\ \Leftrightarrow \log_a(x+2)(x-1)^{\frac{1}{2}}&=\log_a4 \\ \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^{\frac{1}{2}}&=4\end{aligned}$$

となり、両辺を2乗すると

$$\begin{aligned}(x+2)^2(x-1)&=16 \\ \Leftrightarrow x^3+3x^2-20&=0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x^2+5x+10)&=0 \\ \therefore x&=2\end{aligned}$$

である。これは真数条件を満たす。

(2)

$\vec{b}=(x,y)$ とすると、 $\vec{a}=(2,3)$ 、 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ より、

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=2 \\ \Leftrightarrow 2x+3y&=2 \\ \Leftrightarrow y&=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}|\vec{b}|^2&=x^2+y^2 \\ &=x^2+\left(-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2 \\ &=\frac{13}{9}x^2-\frac{8}{9}x+\frac{4}{9} \\ &=\frac{13}{9}\left(x-\frac{4}{13}\right)^2+\frac{4}{13}\end{aligned}$$

が得られるから、 $x=\frac{4}{13}$ のとき、 $|\vec{b}|^2$ は最小値をとり、 $|\vec{b}|$ も最小値となる。このときの $\vec{b}$ は、

$$\vec{b}=\left(\frac{4}{13}, \frac{6}{13}\right)$$

である。

(3)

数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと、

$$\begin{aligned}b_1&=2-1=1 \\ a_{n+2}&=2a_{n+1}-a_n+2 \\ \Leftrightarrow a_{n+2}-a_{n+1}&=a_{n+1}-a_n+2 \\ \Leftrightarrow b_{n+1}&=b_n+2\end{aligned}$$

となるから、数列 $\{b_n\}$ は初項1、公差2の等差数列である。数列 $\{b_n\}$ の一般項は、

$$b_n=1+2(n-1)=2n-1$$

であるから、 $b_n=a_{n+1}-a_n$ より

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=2n-1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1}&=a_n+2n-1 \\ \Leftrightarrow a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) \\ \Leftrightarrow a_n&=1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1) \\ \therefore a_n&=n^2-2n+2\end{aligned}$$

となる。

(4)

等式 $x+y+z+2w=7$ 満たす負でない整数 (x,y,z,w) の組の個数を w の値で場合分けをして調べる。

[1] $w=0$ のとき

$$\begin{aligned}x+y+z&=7より、(x,y,z)の組み合わせは、 \\ (0,0,7), (0,1,6), (0,2,5), (0,3,4), (1,1,5), (1,2,4), (1,3,3), (2,2,3)\end{aligned}$$

であり、これらを区別して数えると、組の個数は

$$3\cdot4+(3!)\cdot4=36$$

となる。

[2] $w=1$ のとき

$$\begin{aligned}x+y+z&=5より、(x,y,z)の組み合わせは、 \\ (0,0,5), (0,1,4), (0,2,3), (1,1,3), (1,2,2)\end{aligned}$$

であり、これらを区別して数えると、組の個数は

$$3\cdot3+(3!)\cdot2=21$$

となる。

[3] $w=2$ のとき

$$\begin{aligned}x+y+z&=3より、(x,y,z)の組み合わせは、 \\ (0,0,3), (0,1,2), (1,1,1)\end{aligned}$$

であり、これらを区別して数えると、組の個数は

$$3+3!+1=10$$

となる。

[4] $w=3$ のとき

$$\begin{aligned}x+y+z&=1より、(x,y,z)の組み合わせは、 \\ (0,0,1)\end{aligned}$$

であり、これらを区別して数えると、組の個数は3個となる。

以上から求める組の個数は、70個である。

(5)

座標空間の4点 $P(0,2,0)$ 、 $Q(0,0,3)$ 、 $R(0,t,1)$ 、 $S(t,0,1)$ より、

$$\begin{aligned}PR&=\sqrt{(t-2)^2+1}=\sqrt{t^2-4t+5} \\ QS&=\sqrt{t^2+(1-3)^2}=\sqrt{t^2+4} \\ QR&=\sqrt{t^2+(1-3)^2}=\sqrt{t^2+4}\end{aligned}$$

であるから、 $QS=QR$ と分かる。よって、 $PR+QS=PR+QR$ であり、3点 P,R,Q が同一直線上に存在し、この順番に存在するときに線分 PR と線分 QR の和が最小となる。よって、 $\overline{PR}$ が $\overline{PQ}$ の k 倍(k は実数)とおくと

$$\begin{aligned}\overline{PR}&=k\overline{PQ} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ t-2 \\ 1 \end{pmatrix} &=k\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t-2=-2k \\ 3k=1 \end{cases} & \\ \Leftrightarrow t=\frac{4}{3}, k=\frac{1}{3} &\end{aligned}$$

となる。以上より、 $t=\frac{4}{3}$ のとき、線分 PR と線分 QS の和が最小となる。