

【I】

(1) $y=f(x)$ と x 軸の共有点の x 座標は、方程式 $x^3-x=0$ の解に一致する。

$$\begin{aligned} x^3-x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, \pm 1 \end{aligned}$$

より、 $y=f(x)$ と x 軸の共有点の x 座標は $0, \pm 1$ である。

(答) $0, \pm 1$

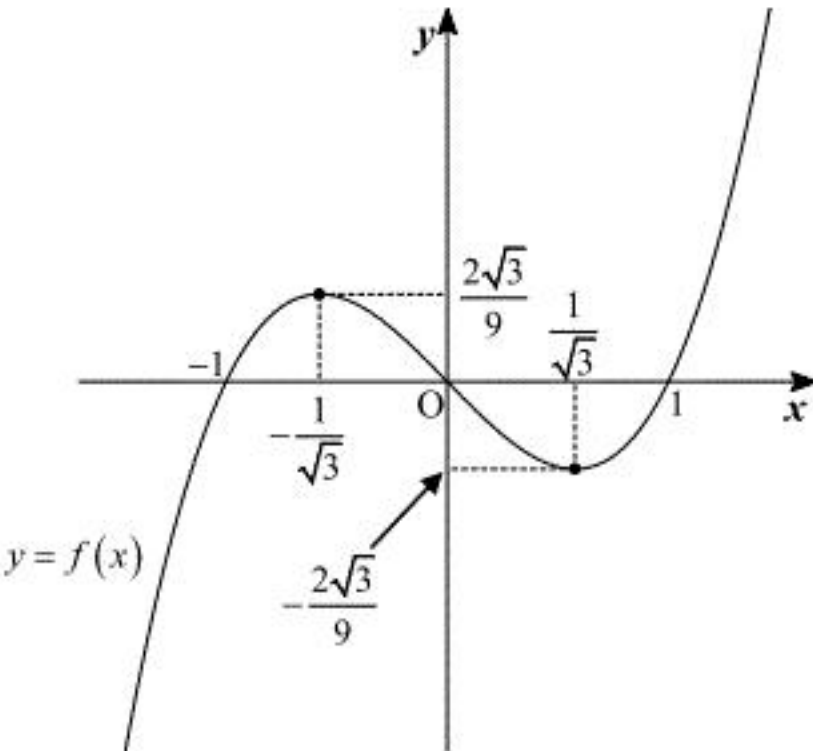
(2)
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-1 \\ &= 3\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$
より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

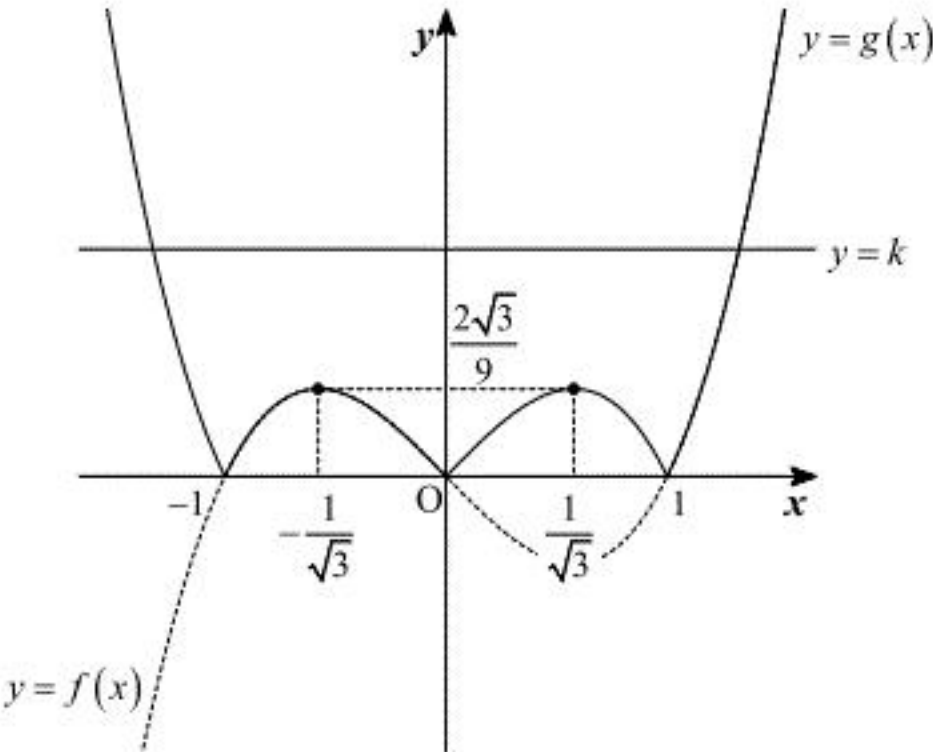
したがって、 $f(x)$ の極大値は
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$
であり、 $f(x)$ の極小値は
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$$
である。

(答) 極大値: $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, 極小値: $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$

(3) (1)の結果と(2)の増減表より、 $y=f(x)$ のグラフは以下のようになる。



$y=g(x)$ のグラフは、 $y=f(x)$ のグラフの $y<0$ の部分を x 軸に関して折り返したものであるから、 $y=g(x)$ のグラフは以下のようになる。



上図より、曲線 $y=g(x)$ と直線 $y=k$ の共有点の個数は、

$k<0$ のとき	0 個
$k=0$ のとき	3 個
$0<k<\frac{2\sqrt{3}}{9}$ のとき	6 個
$k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ のとき	4 個
$\frac{2\sqrt{3}}{9}<k$ のとき	2 個

となる。

$k<0$ のとき	0 個
$k=0$ のとき	3 個
$0<k<\frac{2\sqrt{3}}{9}$ のとき	6 個
(答) $k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ のとき	4 個
$\frac{2\sqrt{3}}{9}<k$ のとき	2 個

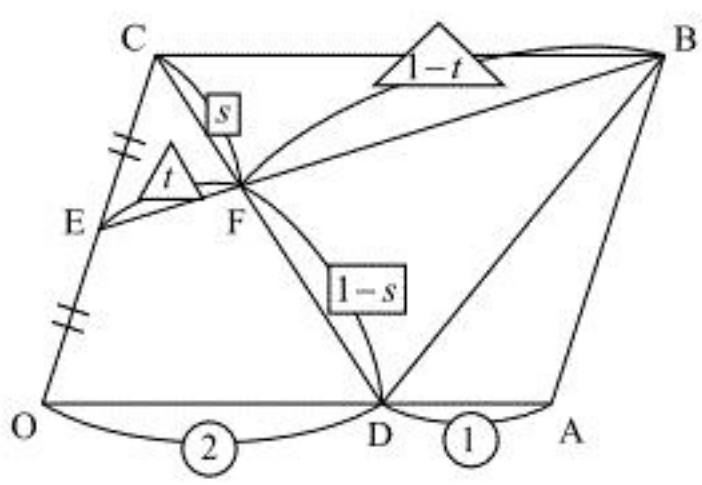
〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$\frac{2s}{3}$	$-s$	t	$\frac{t-1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	5

〔解説〕

各点を図示すると以下のようになる。



点Dは線分OAを2:1に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{a}$$

が成り立つ。よって、

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{c}$$

となるから、 $\frac{CF}{CD} = s$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF} &= s\overrightarrow{CD} \\ &= s\left(\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{c}\right) \\ &= \frac{2s}{3}\vec{a} - s\vec{c} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。また、点Eは線分OCの中点であるから、

$$\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\vec{c}$$

が成り立つ。よって、 $\frac{EF}{EB} = t$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF} &= (1-t)\overrightarrow{CE} + t\overrightarrow{CB} \\ &= (1-t)\left(-\frac{1}{2}\vec{c}\right) + t\vec{a} \\ &= t\vec{a} + \frac{t-1}{2}\vec{c} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。 $\vec{a}, \vec{c}$ は一次独立であることから、①、②より、

$$\begin{cases} \frac{2s}{3} = t \\ -s = \frac{t-1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} s = \frac{3}{8} \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}$$

となる。したがって、 $\triangle CEF : \triangle DBF$ の面積比は

$$\begin{aligned}\triangle CEF : \triangle DBF &= EF \cdot CF : FB \cdot FD \\ &= ts : (1-t)(1-s) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} : \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} \\ &= 1:5\end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	①	②
	35	20
(2)	③	
	12	
(3)	④	⑤
	105	62

〔解説〕

(1)

地点 A から地点 C へ最短距離で移動するとき、右に 3 区画、上に 4 区画進む。よって、地点 A から地点 C への最短の道順の数は、7 回の移動のうち右に進む 3 回を選ぶ場合の数に等しく、
 ${}_7C_3 = 35$ (通り)
となる。

次に、地点 A から地点 B を通らずに地点 C へと向かう場合の数を求める。地点 A から地点 B への最短の道順は、上と同様にして

$${}_6C_2 = 15 \text{ (通り)}$$

である。地点 B から地点 C への最短の道順は 1 通りである。よって、地点 A から地点 C への最短の道順のうち地点 B を通るのは、

$$15 \cdot 1 = 15 \text{ (通り)}$$

である。したがって、地点 B を通らないのは

$$35 - 15 = 20 \text{ (通り)}$$

となる。

(2)

地点 A から地点 D に向かう最短の道順は、(1)と同様にして、

$${}_4C_1 = 4 \text{ (通り)}$$

である。地点 D から地点 E に向かう最短の道順は同様にして、

$${}_3C_1 = 3 \text{ (通り)}$$

である。以上より、地点 A から地点 D を通って地点 E に向かう場合の数は

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ (通り)}$$

と求められる。

(3)

まず、地点 A から地点 F に向かう最短の道順の数を求める。地点 A から地点 F に最短で進むとき、地点 C と地点 E のいずれか一方を通る。以下、どちらを通るかで場合分けを行う。

[1] 地点 C を通るとき

地点 A から地点 C に向かう最短の道順は(1)より 35 通りであり、地点 C から地点 F に向かう最短の道順は 1 通りである。よって、地点 A から地点 F に向かう最短の道順のうち地点 C を通るのは、

$$35 \text{ (通り)}$$

となる。

[2] 地点 E を通るとき

地点 A から地点 E に向かう最短の道順は、(1)と同様にして

$${}_7C_3 = 35 \text{ (通り)}$$

である。また、地点 E から地点 F に向かう最短経路は、(1)と同様にして

$${}_2C_1 = 2 \text{ (通り)}$$

となる。よって、地点 A から地点 F に向かう最短の道順のうち地点 E を通るのは、

$$35 \cdot 2 = 70 \text{ (通り)}$$

となる。

以上[1], [2]より地点 A から地点 F に向かう場合の数は

$$35 + 70 = 105 \text{ (通り)}$$

と求められる。

次に、地点 A から地点 F に向かう最短の道順で、地点 B, C, D, E のうち 2 つ以上を通らない道順の数を求める。地点 B, C, D, E の 2 つ以上を通る場合の数を求め全体から引けばよい。地点 B と地点 C を通るとき、地点 C と地点 D を通るとき、地点 D と地点 E を通るときで場合分けを行う。

[1] 地点 B と地点 C を通るとき

(1)と同様にして、

$${}_6C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_2C_2 = 15 \text{ (通り)}$$

となる。

[2] 地点 C と地点 D を通るとき

(1)と同様にして、

$${}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot {}_2C_2 = 4 \text{ (通り)}$$

となる。

[3] 地点 D と地点 E を通るとき

(1)と同様にして、

$${}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_1 = 24 \text{ (通り)}$$

となる。

地点 B, C, D, E のうちの 3 つ以上を通るような道順はないから、以上[1], [2], [3]は排反である。したがって、求める場合の数は、

$$105 - (15 + 4 + 24) = 62 \text{ (通り)}$$

である。