

【I】

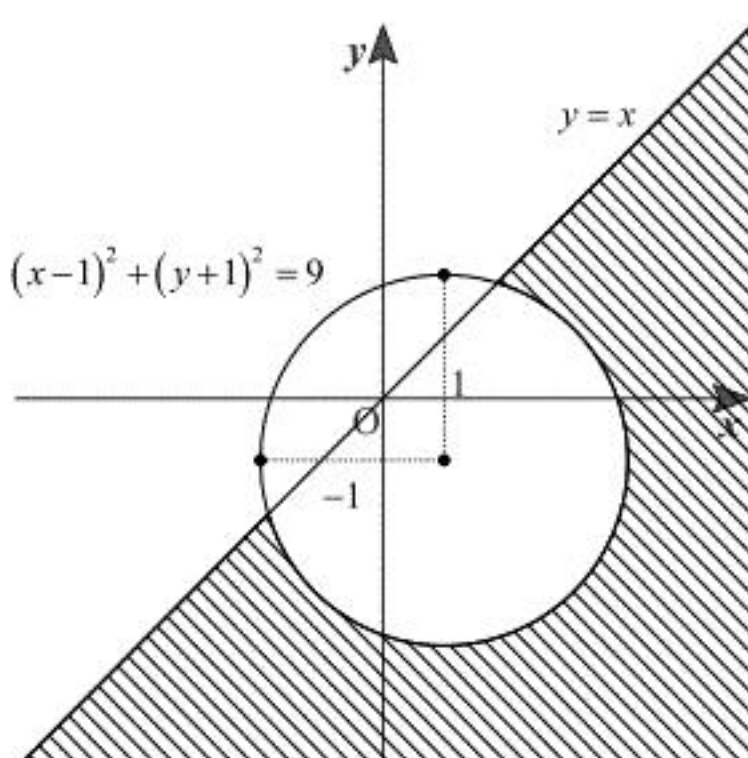
(1)

与えられた連立不等式を変形すると、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 \geq 0 \\ x \geq y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 \geq 9 \\ x \geq y \end{cases}$$

となる。これより、求める領域は、円 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$ の周及び外部と、直線 $y=x$ 上及びその下側の共通部分であるから、下図のようになる。ただし境界は含む。



(答) 上図

(2)

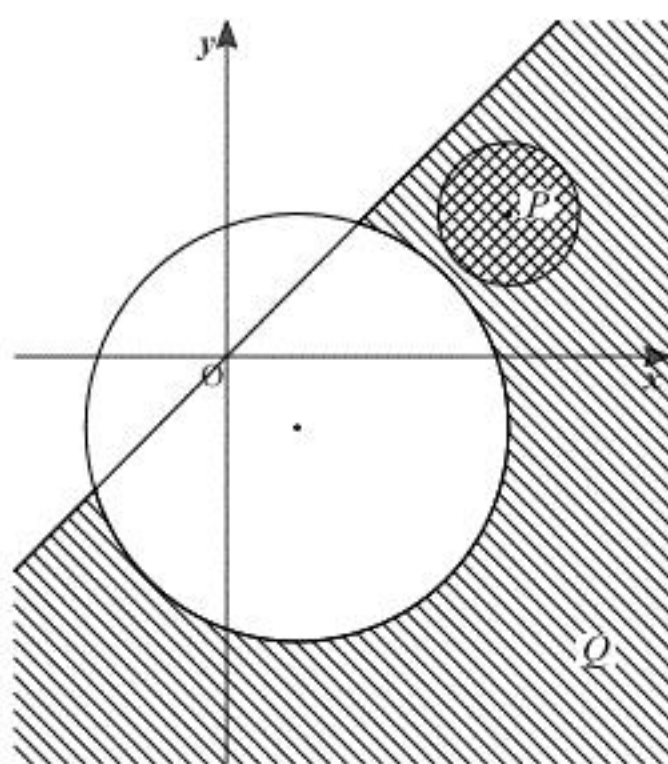
(1)で求めた領域を D とする。また、円 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = r^2$ は、点 $(4, 2)$ を中心とする半径 r の円である。ここで、命題「 $(x-4)^2 + (y-2)^2 \leq r^2$ ならば、(1)の連立不等式が成り立つ」における仮定と結論を満たす点 (x, y) 全体の集合をそれぞれ P, Q とする。すなわち、

$$P = \{(x, y) \mid (x-4)^2 + (y-2)^2 \leq r^2\}$$

$$Q = \{(x, y) \mid \text{領域 } D\}$$

とする。このとき、題意の命題が成立するための条件は $P \subset Q$ 、すなわち、

円 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = r^2$ が領域 D に含まれることである。



したがって、円 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = r^2$ が直線 $y=x$ 及び円 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$ と接するもしくは共有点をもたないような r の最大値を求めればよい。円 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = r^2$ が直線 $y=x$ と接するもしくは共有点をもたないとき、点 $(4, 2)$ と直線 $y=x$ の距離が r 以下である。
 $y=x \Leftrightarrow x-y=0$ であるから、点 $(4, 2)$ と直線 $y=x$ の距離は、

$$\frac{|1 \cdot 4 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

より、 $r \leq 2$ が必要である。また、円 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = r^2$ と円 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$ が接するもしくは共有点をもたないとき、2つの円の中心間の距離は、2つの円の半径の長さの和以上であるから、

$$r+3 \leq \sqrt{(4-1)^2 + (2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow r \leq 3\sqrt{2}-3$$

が必要である。

$$\sqrt{2} - (3\sqrt{2}-3) = 3-2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{9} > \sqrt{8} \Leftrightarrow 3 > 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 3-2\sqrt{2} > 0$$

であるので、 $\sqrt{2} > 3\sqrt{2}-3$ となり、題意が成立するための条件は、 $r \leq 3\sqrt{2}-3$ であるから、求める r の最大値は、 $3\sqrt{2}-3$ である。

(答) $3\sqrt{2}-3$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
2	4	2	$-\frac{2}{3}$	8	$-\frac{134}{27}$

〔解説〕

(1)

2倍角の公式を用いて与えられた関数を変形すると、

$$\begin{aligned}\sin 2\theta \cos \theta - 2 \cos 2\theta + 6 \sin \theta &= 2 \sin \theta \cos^2 \theta - 2(1 - 2 \sin^2 \theta) + 6 \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + 4 \sin^2 \theta - 2 + 6 \sin \theta \\ &= -2 \sin^3 \theta + 4 \sin^2 \theta + 8 \sin \theta - 2\end{aligned}$$

となるから、 t の式で表すと、

$$\sin 2\theta \cos \theta - 2 \cos 2\theta + 6 \sin \theta = -2t^3 + 4t^2 + 8t - 2$$

となる。

(2)

$f(x) = -2x^3 + 4x^2 + 8x - 2$ について考える。これを微分すると、

$$f'(x) = -6x^2 + 8x + 8 = -2(3x + 2)(x - 2)$$

となるから、 $f(x)$ の増減表は、以下のようになる。

x	...	$-\frac{2}{3}$	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	極小値	$\nearrow$	極大値	$\searrow$

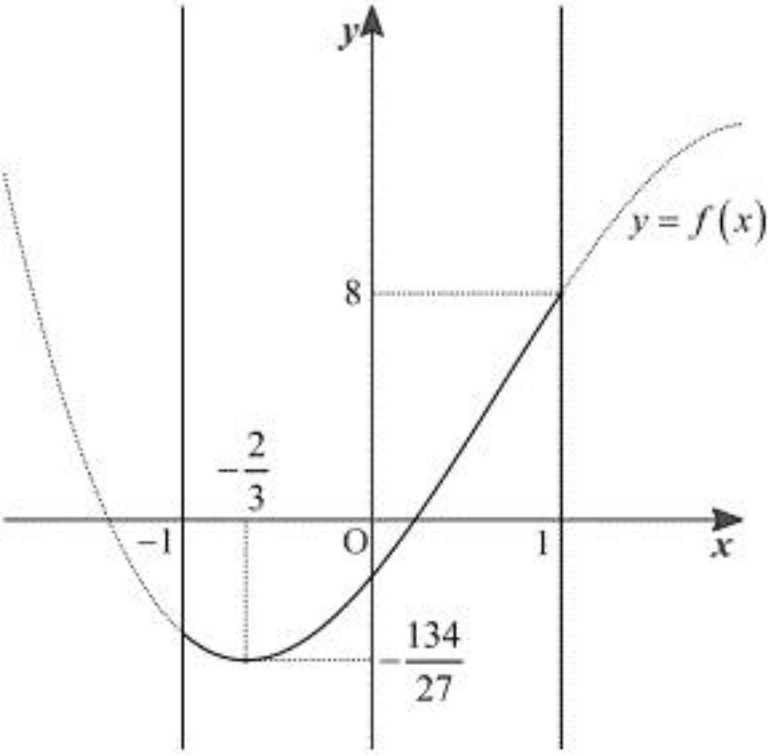
これより、 $f(x)$ は $x = 2$ で極大値をとり、 $x = -\frac{2}{3}$ で極小値をとる。

(3)

θ が実数全体を動くとき、 $t = \sin \theta$ の定義域は $-1 \leq t \leq 1$ である。したがって、 $\sin 2\theta \cos \theta - 2 \cos 2\theta + 6 \sin \theta$ の最大値と最小値を求めるには、(2)の増減表で $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めればよい。

$$\begin{aligned}f(-1) &= -4 \\ f\left(-\frac{2}{3}\right) &= -\frac{134}{27} \\ f(1) &= 8\end{aligned}$$

に注意してすると、 $-1 \leq x \leq 1$ における $y = f(x)$ の概形は下図のようになる。



したがって、

$$\text{最大値} \cdots f(1) = -2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 2 = 8$$

$$\text{最小値} \cdots f\left(-\frac{2}{3}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 8 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 = -\frac{134}{27}$$

と求められる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
$\left(\frac{1}{a}, a\right)$	2	4	$2+\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$	$6\sqrt{3}$

〔解説〕

点Bの座標を (X, Y) とおく。点Bは、直線 $y=x$ に関して点Aを対称移動させた点だから、直線ABと直線 $y=x$ は直交する。したがって、直線ABの傾きは-1となるから、

$$\frac{Y-\frac{1}{a}}{X-a}=-1$$

$$\Leftrightarrow X+Y=a+\frac{1}{a} \qquad \cdots (1)$$

を満たす。また、直線 $y=x$ と点A、点Bとのそれぞれの距離は等しいから、線分ABの中点は直線 $y=x$ 上にある。したがって、

$$\frac{Y+\frac{1}{a}}{2}=\frac{X+a}{2}$$

$$\Leftrightarrow -X+Y=a-\frac{1}{a} \qquad \cdots (2)$$

を満たす。(1), (2)より、

$$X=\frac{1}{a}, Y=a$$

と求められる。以上より、点Bの座標は $\left(\frac{1}{a}, a\right)$ である。また、点C $(-1, -1)$ に対して三角形ABCが正三角形であるから、 $AB=AC$ が成り立つ。したがって、

$$\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{(a+1)^2+\left(\frac{1}{a}+1\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2a^2-4+\frac{2}{a^2}}=\sqrt{a^2+2a+2+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}}$$

である。両辺を2乗して変形すると、

$$2a^2-4+\frac{2}{a^2}=a^2+2a+2+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-8=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+2\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

となるから、 $X=a+\frac{1}{a}$ とすると、 X は、

$$2X^2-8=X^2+2X$$

$$\Leftrightarrow X^2-2X-8=0$$

を満たす。また $a>1$ より $0<\frac{1}{a}<1$ であるので、 $X=a+\frac{1}{a}$ は正であることに注意して、②で求めた2次方程式を解くと、

$$X^2-2X-8=0$$

$$\Leftrightarrow (X-4)(X+2)=0$$

$$\therefore X=4$$

と求められる。さらに $a>1$ に注意して、③の結果を利用すると、

$$a+\frac{1}{a}=4$$

$$\Leftrightarrow a^2-4a+1=0$$

$$\therefore a=2+\sqrt{3} \quad (\because \sqrt{3}>\sqrt{1}=1\Leftrightarrow 2-\sqrt{3}<1)$$

となる。ここで正三角形ABCの一辺の長さは、線分ABについて考えると、

$$\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{2\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-8}$$

$$=\sqrt{2X^2-8}$$

であるから、③の結果を利用すると、

$$\sqrt{2\cdot 4^2-8}=2\sqrt{6}$$

となる。また、三角形ABCの面積は、

$$\frac{1}{2}\cdot (2\sqrt{6})^2\cdot \sin \frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$$

と求められる。