

【I】

(1)

$a > 0$ より,

$$x^2 - ax \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 0, a \leq x$$

であるから,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & (x \leq 0, a \leq x) \\ -x^2 + ax & (0 < x < a) \end{cases}$$

となる。よって、 $y = f(x)$ のグラフは、 $x \leq 0, a \leq x$ の範囲で放物線 $y = x^2 - ax$ であり、

$0 < x < a$ の範囲で放物線 $y = -x^2 + ax$ である。ここで、

$$x^2 - ax = x$$

$$\Leftrightarrow x\{x - (a+1)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, a+1$$

より放物線 $y = x^2 - ax$ と直線 $y = g(x)$ の $x \leq 0, a \leq x$ の範囲での交点の x 座標は $0, a+1$ である。

また、

$$-x^2 + ax = x$$

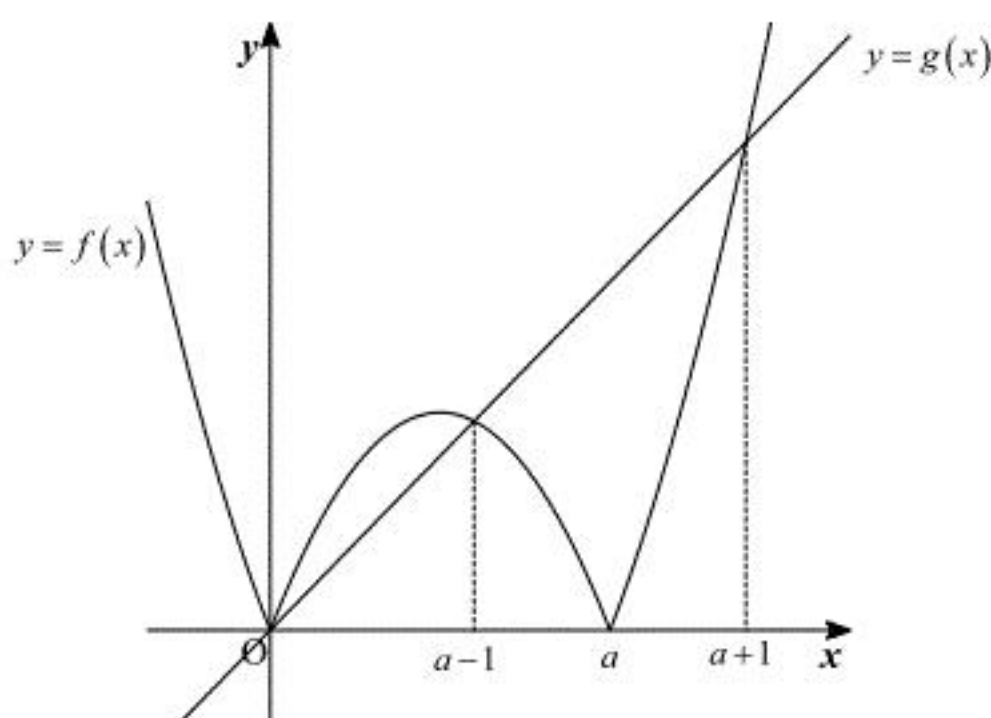
$$\Leftrightarrow x\{x - (a-1)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, a-1$$

であり、 $a > 1$ より $0 < a-1 < a$ であるから、放物線 $y = -x^2 + ax$ と直線 $y = g(x)$ の $0 < x < a$ の

範囲での交点の x 座標は $a-1$ である。以上より、 $y = f(x), y = g(x)$ のグラフは以下のよう

になる。



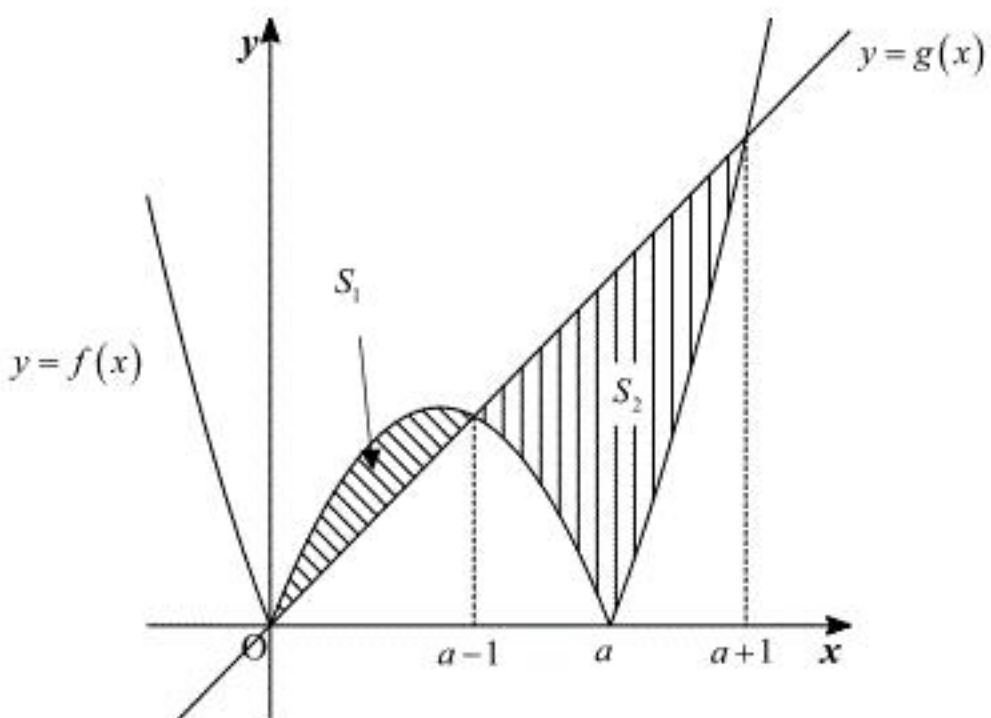
上図より、 $a-1 \leq x \leq a+1$ において $f(x) \leq g(x)$ となる。

(証明終)

(2)

$y = f(x), y = g(x)$ のグラフで囲まれる領域のうち、 $x \leq a-1$ にある部分は下図の斜線部の

ようになり、 $x \geq a-1$ にある部分は下図の縦線部のようになる。



したがって、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{a-1} \{(-x^2 + ax) - x\} dx \\ &= -\int_0^{a-1} x\{x - (a-1)\} dx \\ &= \frac{1}{6}(a-1)^3 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{a-1}^a \{x - (-x^2 + ax)\} dx + \int_a^{a+1} \{x - (x^2 - ax)\} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - (a-1)\frac{x^2}{2} \right]_{a-1}^a + \left[-\frac{x^3}{3} + (a+1)\frac{x^2}{2} \right]_a^{a+1} \\ &= -\frac{a^3}{6} + \frac{a^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{6} + \frac{(a+1)^3}{6} - \frac{a^3}{6} - \frac{a^2}{2} \\ &= a \end{aligned}$$

である。したがって、 $S_1 : S_2 = 1 : 12$ となるときの、 $S_2 = 12S_1$ より、

$$\begin{aligned} a &= 12 \cdot \frac{1}{6}(a-1)^3 \\ \Leftrightarrow 2a^3 - 6a + 5a - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-2)(2a^2 - 2a + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-2) \left\{ 2 \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right\} &= 0 \\ \therefore a &= 2 \left(\because 2 \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} > 0 \right) \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = 2$

〔Ⅱ〕

(1)

$\log_c(a+b) + \log_c(a-b) = k$ より, $\log_c(a+b)(a-b) = k$ となるから,

$$a^2 - b^2 = c^k$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^k$$

である。

$$(答) \ a^2 = b^2 + c^k$$

(2)

$k=2$ のとき, $a^2 = b^2 + c^2$ であるから, 三平方の定理の逆から, $\triangle ABC$ は $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形となる。

$$(答) \ \angle A = 90^\circ \text{ の直角三角形}$$

(3)

$\angle A$ が鋭角となるための条件は,

$$a^2 < b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^k < b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow c^k < c^2$$

$$\Leftrightarrow k > 2 \ (\because 0 < c < 1)$$

である。同様に, $\angle A$ が鈍角となるための条件は,

$$a^2 > b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^k > b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow c^k > c^2$$

$$\Leftrightarrow k < 2 \ (\because 0 < c < 1)$$

である。 $\angle A$ が直角となるための条件は, $\angle A$ が鋭角でも鈍角でもないことであるから, $k > 2$ でも $k < 2$ でもないこと, すなわち

$$k = 2$$

となることである。以上より, k のとりうる値の範囲は, $\angle A$ が鋭角となるとき $k > 2$, $\angle A$ が直角となるとき $k = 2$, $\angle A$ が鈍角となるとき $k < 2$ である。

$$(答) \ \begin{cases} \angle A \text{ が鋭角となるとき } k > 2 \\ \angle A \text{ が直角となるとき } k = 2 \\ \angle A \text{ が鈍角となるとき } k < 2 \end{cases}$$

〔Ⅲ〕

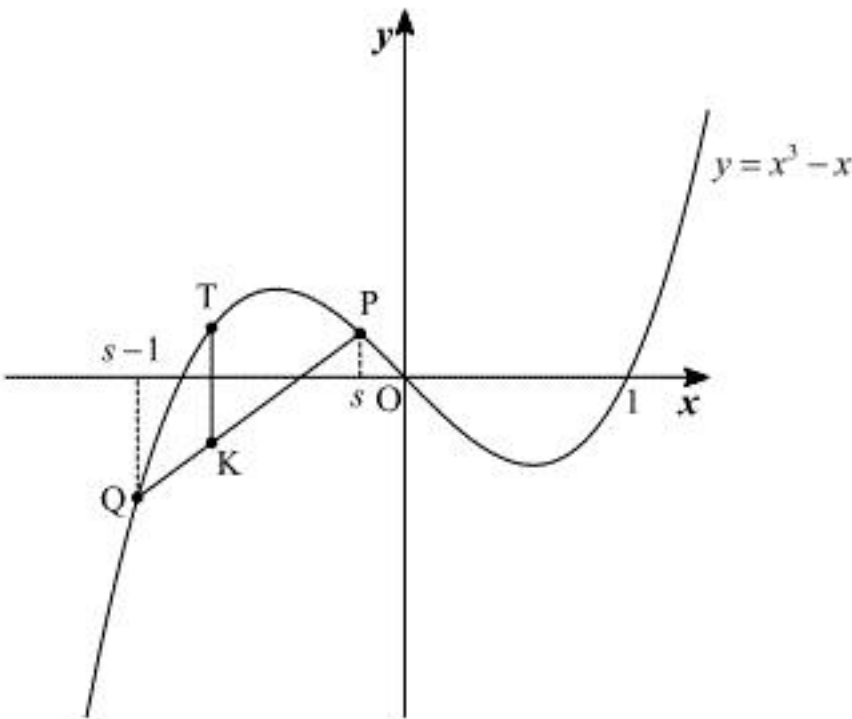
〔解答〕

(1)	①	②
	$s-t$	$(s-1)s(s-3t+1)$
(2)	③	
	$\frac{4}{27}$	
(3)	④	⑤
	$(s-t-1)(s-t)(s-t+1)$	$\frac{t+1}{3}$

〔解説〕

(1)

各点を図示すると以下のようになる。



点 P, Q は曲線 $y = x^3 - x$ 上の点であるから、その座標は、

$$P(s, s^3 - s), Q(s-1, (s-1)^3 - (s-1))$$

である。点 K は線分 PQ を $t:1-t$ に内分する点であるから、K の x 座標は

$$(1-t)s + t(s-1) = s-t$$

であり、 y 座標は

$$\begin{aligned} (1-t)(s^3 - s) + t\{(s-1)^3 - (s-1)\} &= s^3 - s - t(s^3 - s) + t(s^3 - 3s^2 + 2s) \\ &= s^3 - s + t(-3s^2 + 3s) \\ &= s(s+1)(s-1) - 3st(s-1) \\ &= s(s-1)\{(s+1) - 3t\} \\ &= (s-1)s(s-3t+1) \end{aligned}$$

となる。

(2)

$t = \frac{2}{3}$ のとき、K の y 座標を $f(s)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(s) &= s^3 - 3s^2 \cdot \frac{2}{3} + 3s \cdot \frac{2}{3} - s \\ &= s^3 - 2s^2 + s \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} f'(s) &= 3s^2 - 4s + 1 \\ &= (s-1)(3s-1) \end{aligned}$$

より、 $s < 1$ における $f(s)$ の増減表は以下のようになる。

s	...	$\frac{1}{3}$	...	(1)
$f'(s)$	+	0	-	(0)
$f(s)$		↗	↘	

上表より、K の y 座標 $f(s)$ の最大値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{27} \end{aligned}$$

となる。

(3)

点 T は、 x 座標が $s-t$ であるような $y = x^3 - x$ 上の点であるから、 y 座標は

$$\begin{aligned} (s-t)^3 - (s-t) &= (s-t)\{(s-t)^2 - 1\} \\ &= (s-t)\{(s-t)+1\}\{(s-t)-1\} \\ &= (s-t-1)(s-t)(s-t+1) \end{aligned}$$

である。よって、(1)の結果もあわせて、 x 座標が一致する 2 点 K と T の距離は

$$\begin{aligned} &\left| \{s^3 - s + t(-3s^2 + 3s)\} - \{(s-t)^3 - (s-t)\} \right| \\ &= \left| (s^3 - 3s^2t + 3st - s) - (s^3 - 3s^2t + 3st^2 - s - t^3 + t) \right| \\ &= |3st - 3st^2 + t^3 - t| \\ &= |3st(1-t) + t(t+1)(t-1)| \\ &= |t(1-t)\{3s - (t+1)\}| \\ &= 3t(1-t) \left| s - \frac{t+1}{3} \right| \quad (\because 0 < t < 1) \end{aligned}$$

となる。したがって、K と T の距離が最小となるのは、 $s = \frac{t+1}{3}$ のときである。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

(1)	①	②	
	$1 < X < 9$	$0 < x < 2$	
(2)	③		
	6		
(3)	④	⑤	⑥
	6	1	1

〔解説〕

(1)

1つ目の不等式を解くと、

$$\begin{aligned} X^2 - 10X + 9 &< 0 \\ \Leftrightarrow (X-1)(X-9) &< 0 \\ \therefore 1 < X < 9 \end{aligned}$$

となる。2つ目の不等式について、

$$\begin{aligned} 9^{x-1} - 10 \cdot 3^{x-2} + 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow 9^x - 10 \cdot 3^x + 9 &< 0 \\ \Leftrightarrow (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 &< 0 \end{aligned}$$

である。これは、(1)において $X = 3^x$ とした場合と一致するから、

$$1 < 3^x < 9$$

となり、底3は1より大きいから、 $0 < x < 2$ を得る。

(2)

$3^x > 0$ 、 $3^y > 0$ より、相加平均と相乗平均の大小関係から、

$$3^x + 3^y \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^y} = 2\sqrt{3^{x+y}} = 2\sqrt{3^2} = 6$$

である。等号成立は $3^x = 3^y$ 、すなわち $x = y$ のときである。 $x + y = 2$ より、 $x = y = 1$ のときに実際に等号が成立する。したがって、 t の最小値は6である。

(3)

$Y = 3^x + 3^y$ とおくと、

$$\begin{aligned} Y^2 &= (3^x + 3^y)^2 \\ &= 9^x + 2 \cdot 3^{x+y} + 9^y \\ &= 9^x + 9^y + 18 \quad (\because x + y = 2) \end{aligned}$$

であるから、

$$9^x + 9^y = Y^2 - 18$$

が成立する。したがって、

$$\begin{aligned} u &= 9^x + 9^y - 12(3^x + 3^y) + 60 \\ &= Y^2 - 18 - 12Y + 60 \\ &= (Y - 6)^2 + 6 \end{aligned}$$

となる。よって、 $Y = 6$ となることがあればそのときに u は最小である。(2)より、 $x = y = 1$ のときに確かに $Y = 6$ をとるから、 u は $x = 1$ 、 $y = 1$ のときに最小値6をとる。