

【Ⅰ】

(1)

$$f(x)=\frac{1}{\sin 2x} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(\sin 2x)'}{\sin^2 2x} \\ &= -\frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x} \end{aligned}$$

となる。以上より $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$	$\diagdown$	$-$	0	$+$	$\diagup$
$f(x)$	$\diagdown$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\diagup$

以上より、 $f(x)$ は $x=\frac{\pi}{4}$ で極小値 1 をとる。

$$\text{(答) } f'(x)=-\frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x}, \text{ 極小値 } 1 \left(x=\frac{\pi}{4}\right)$$

(2)

求める交点の x 座標は

$$\begin{cases} y=\frac{1}{\sin 2x} \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \\ y=2 \end{cases}$$

の x の実数解である。これを解くと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 2x} &= 2 \\ \Leftrightarrow \sin 2x &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答) } x=\frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi$$

(3)

C を積分定数として、

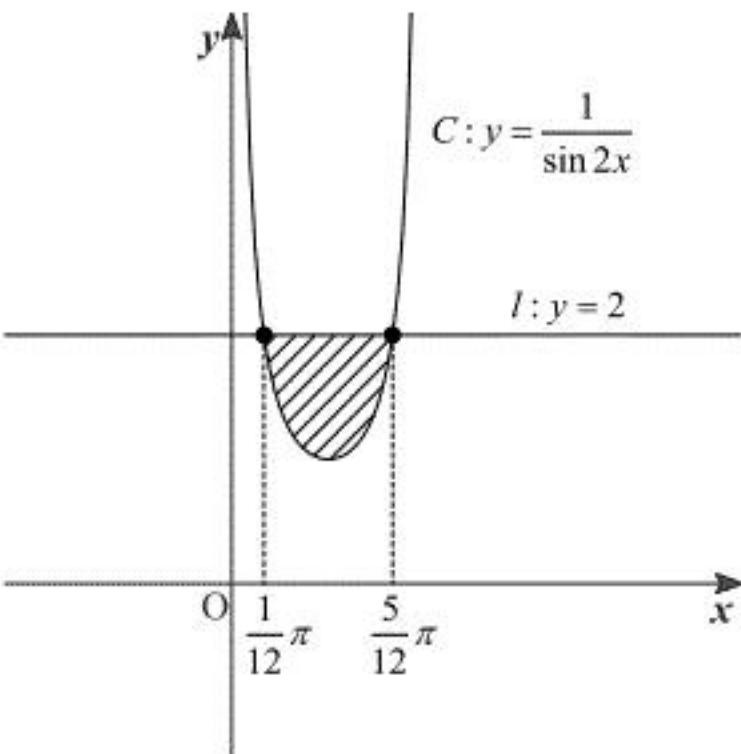
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin 2x} dx &= \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 2x} dx \\ &= \int \frac{\sin 2x}{1-\cos^2 2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-\cos 2x} + \frac{1}{1+\cos 2x} \right) \sin 2x dx \\ &= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1-\cos 2x} + \frac{1}{1+\cos 2x} \right) (\cos 2x)' dx \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ -\log|1-\cos 2x| + \log|1+\cos 2x| \right\} + C \\ &= \frac{1}{4} \log \left| \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \right| + C \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答) } \frac{1}{4} \log \left| \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \right| + C \text{ (} C \text{ は積分定数)}$$

(4)

図形 K は下図の斜線部である。



K の面積 S は、(3)を用いて、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{12}\pi}^{\frac{5}{12}\pi} \left(2 - \frac{1}{\sin 2x} \right) dx \\ &= \left[2x - \frac{1}{4} \log \left| \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \right| \right]_{\frac{1}{12}\pi}^{\frac{5}{12}\pi} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{4} \left\{ \log \left(\frac{1-\cos \frac{5}{6}\pi}{1+\cos \frac{5}{6}\pi} \right) - \log \left(\frac{1-\cos \frac{1}{6}\pi}{1+\cos \frac{1}{6}\pi} \right) \right\} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{4} \left\{ \log \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right) - \log \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right) \right\} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{4} \left\{ \log \left(2+\sqrt{3} \right)^2 - \log \left(2-\sqrt{3} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \log \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{2}{3}\pi - \log \left(2+\sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答) } S=\frac{2}{3}\pi-\log\left(2+\sqrt{3}\right)$$

【Ⅱ】

〔解答〕

(1)	①		
	−2		
(2)	②	③	
	50	4	
(3)	④	⑤	⑥
	$\frac{6}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{25}{22}$

〔解説〕

(1) $\overrightarrow{OA}=(2,-1,1), \overrightarrow{OB}=(-1,2,2)$ であるから,
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=2 \cdot (-1)+(-1) \cdot 2+1 \cdot 2=-2$
 となる。

(2) $\overrightarrow{OC}=(x,y,z)$ であるから,
 $|\overrightarrow{OC}|=5\sqrt{2}$
 $\Leftrightarrow |\overrightarrow{OC}|^2=50$
 $\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=50$
 となる。また、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ が $\overrightarrow{OC}$ と垂直であるから、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}=0, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}=0$ が成立する。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot x + (-1) \cdot y + 1 \cdot z &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x - y + z &= 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-1) \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z &= 0 \\ \Leftrightarrow -x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=50 \\ 2x-y+z=0 \\ -x+2y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=50 \\ 4x-2y+2z=0 \\ -x+2y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=50 \\ 3x+4z=0 \\ 5x-4y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(\frac{5}{4}x\right)^2+\left(-\frac{3}{4}x\right)^2=50 \\ y=\frac{5}{4}x \\ z=-\frac{3}{4}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{50}{16}x^2=50 \\ y=\frac{5}{4}x \\ z=-\frac{3}{4}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \quad (\because x>0) \\ z=-3 \end{cases}$$

となる。これより、 $x=4, y=5, z=-3$ である。

(3) 与えられた条件より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &= s(2,-1,1) + t(-1,2,2) \\ &= (2s-t, -s+2t, s+2t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} &= u\overrightarrow{CD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} &= u(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OE} &= (1-u)\overrightarrow{OC} + u\overrightarrow{OD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OE} &= (1-u)(4,5,-3) + u(1,1,1) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OE} &= (4-3u, 5-4u, -3+4u) \end{aligned}$$

が成立する。これより、ベクトルの成分を比較して、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2s-t=4-3u \\ -s+2t=5-4u \\ s+2t=-3+4u \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2s-t=4-3u \\ -s+2t=5-4u \\ 4t=2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2s-t=4-3u \\ -2s+4t=10-8u \\ t=\frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2s-\frac{1}{2}=4-3u \\ 3 \cdot \frac{1}{2}=14-11u \\ t=\frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} s=\frac{4-3 \cdot \frac{25}{22}+\frac{1}{2}}{2} \\ t=\frac{1}{2} \\ u=\frac{25}{22} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} s=\frac{6}{11} \\ t=\frac{1}{2} \\ u=\frac{25}{22} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	①		
	1		
(2)	②	③	
	$\frac{2}{5}\pi$	$\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$	
(3)	④	⑤	⑥
	-1	t^2+t-1	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$
(4)	⑦		
	$\frac{\pi}{15}$		

〔解説〕

(1)

$z=\cos\theta+i\sin\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおく。ド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned} z^5 &= (\cos\theta+i\sin\theta)^5 \\ &= \cos 5\theta+i\sin 5\theta \end{aligned}$$

となる。 $z^5=1$ を満たすことから、 $\cos 5\theta+i\sin 5\theta=1$ が成立する。よって、両辺の実部と虚部を比較して、 $\cos 5\theta=1$ を得る。

(2)

$\cos 5\theta+i\sin 5\theta=1$ が成立するから、 $5\theta=2k\pi$ (k は整数)となる。 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より、 $\theta=\frac{2}{5}\pi$ であ

る。これより、 $z=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$ となる。

(3)

$$\begin{aligned} z^5 &= 1 \\ \Leftrightarrow (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) &= 0 \\ \therefore z^4+z^3+z^2+z+1 &= 0 \quad (\because z \neq 1) \end{aligned}$$

より、 $z^4+z^3+z^2+z=-1$ となる。次に、 $z^4+z^3+z^2+z=-1$ の両辺を z^2 で割り、 $t=z+\frac{1}{z}$ とすると

$$\begin{aligned} z^4+z^3+z^2+z &= -1 \\ \Leftrightarrow z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} &= 0 \quad (\because z \neq 0) \\ \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2+t-1 &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、

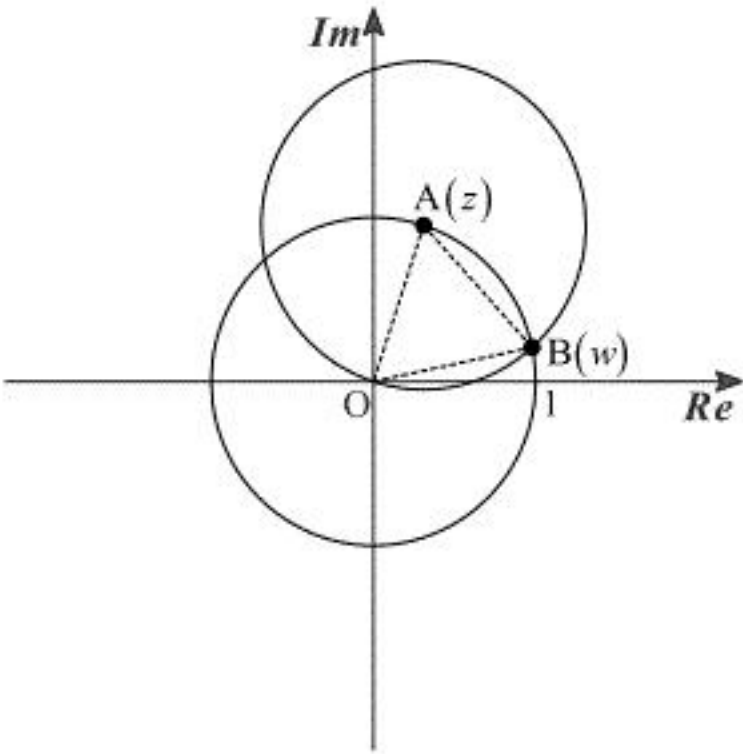
$$\begin{aligned} t &= z+\frac{1}{z} \\ &= (\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)} \\ &= (\cos\theta+i\sin\theta)+\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\} \\ &= (\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta) \\ &= 2\cos\theta \end{aligned}$$

であるから、 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より、 $t>0$ となる。以上より、 $t^2+t-1=0$ を解いて、

$$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because t>0)$$

となる。よって、 $\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ である。

(4)



z の偏角は $\theta=\frac{2}{5}\pi$ である。このときOとAを中心とする円の半径はどちらも1であるから、

上図より $OA=OB=AB=1$ となる。よって、 $\triangle OAB$ は正三角形であり、 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$ とな

る。 w の偏角は、 $0<\theta'<\frac{\pi}{2}$ であることも考慮して、

$$\begin{aligned} \theta' &= \theta-\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{2}{5}\pi-\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{15} \end{aligned}$$

となる。

【Ⅳ】

【解答】

	①	②
(1)	$\frac{2}{7}$	$\frac{55}{84}$
	③	
(2)	$-\frac{81}{16}$	
	④	⑤
(3)	$-2n^2+3n+5$	$\frac{8}{9}$
	⑥	⑦
(4)	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$

【解説】

- (1) 9枚のカードから3枚のカードを選び出す場合の数は ${}_9C_3$ 通りであり、これらは同様に確からしい。このとき、取り出した3枚が異なる3色のカードである場合の数は、 ${}_2C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_4C_1$ 通りである。よって求める確率は、 $\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_4C_1}{{}_9C_3}=\frac{2}{7}$ である。また取り出した3枚が同じ1色のカードである場合の数は ${}_3C_3+_4C_3$ 通りである。これが起こる確率は $\frac{{}_3C_3+_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{5}{84}$ である。また、取り出した3枚が2色である場合は、取り出した3枚が異なる3色のカードである場合と取り出した3枚が同じ1色のカードである場合を足し合わせたものの余事象であるから、求める確率は $1-\frac{2}{7}-\frac{5}{84}=\frac{55}{84}$ となる。

- (2) 与式を変形すると、

$$\begin{aligned}2^{-\frac{1}{8}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}&=2^{-\frac{1}{8}}\times2^{-10}\\&=2^{-\frac{81}{8}}\\&=\left(2^2\right)^{-\frac{81}{16}}\\&=4^{-\frac{81}{16}}\end{aligned}$$

となる。

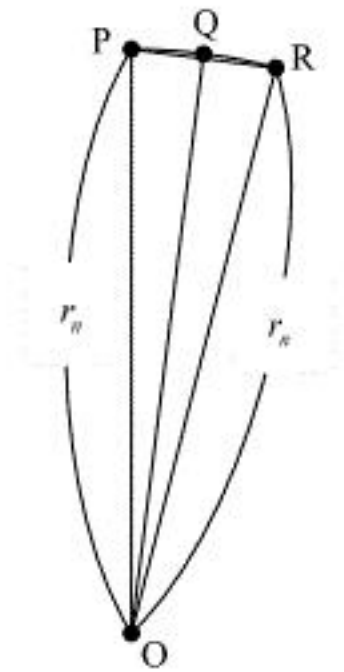
- (3)
$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{(n+1)^3-(n+1)}{3^{n+1}}-\frac{n^3-n}{3^n}\\&=\frac{(n+1)^3-(n+1)-3n^3+3n}{3^{n+1}}\\&=\frac{n(-2n^2+3n+5)}{3^{n+1}}\\&=\frac{-n(n+1)(2n-5)}{3^{n+1}}\end{aligned}$$

となる。よって、 $n=1,2$ のとき、 $a_{n+1}-a_n>0$ 、 $n\geq3$ のとき、 $a_{n+1}-a_n<0$ より、 $a_1<a_2<a_3>a_4>a_5\cdots$ となるから、 a_n の最大値は

$$a_3=\frac{3^3-3}{3^3}=\frac{8}{9}$$

である。

- (4) 正 n 角形の一部を取り出して考える。下図のような図形を考え、点Qを弧PRの中点とする。



このとき、 $\angle POR$ は正 n 角形の中心角であるので、 $\angle POQ=\angle ROQ=\frac{\pi}{n}$ となる。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{PR}{2}&=r_n\sin\frac{\pi}{n}\\\Leftrightarrow PR&=2r_n\sin\frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

となる。正 n 角形の周の長さは l であるから、

$$\begin{aligned}nPR&=l\\\Leftrightarrow 2nr_n\sin\frac{\pi}{n}&=l\\\Leftrightarrow r_n&=\frac{1}{2n\sin\frac{\pi}{n}}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}r_n&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{2n\sin\frac{\pi}{n}}\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\\&=\frac{1}{2\pi}\cdot1\\&=\frac{1}{2\pi}\end{aligned}$$

となる。また、 $S_n=\frac{1}{2}nr_n^2\sin\frac{2\pi}{n}$ であるから、

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}S_n&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{2}nr_n^2\sin\frac{2\pi}{n}\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2n\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2\sin\frac{2\pi}{n}\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{2}n\cdot\frac{2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{4n^2\sin^2\frac{\pi}{n}}\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{n\sin\frac{\pi}{n}}\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{1}{\pi}\\&=\frac{1}{4}\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{\pi}\\&=\frac{1}{4\pi}\end{aligned}$$

となる。