

〔I〕

(1)

$$f'(x) = x^2 + 2ax + b$$

である。 $f(x)$ が極大値と極小値をもつならば、極大値、極小値をとる点で $f'(x) = 0$ が成り立つから、方程式 $f'(x) = 0$ は異なる2つの実数解をもつ。逆に、方程式 $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつならば、その2解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、

$$f'(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$$

となるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになり、極大値と極小値が存在する。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

以上より、 $f(x)$ が極大値と極小値をもつための条件は、方程式 $f'(x) = 0$ が2つの実数解をもつことである。方程式 $f'(x) = 0$ の判別式を D とすると、求める条件は、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - b &> 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a^2 - b > 0$

(2)

(1)の過程より、 $f(x)$ が $-1 < x < 1$ に極大値と極小値をもつための条件は、方程式 $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもち、かつその2つが $-1 < x < 1$ の範囲にあることである。この条件は、

$$\begin{cases} D > 0 & \cdots \textcircled{1} \\ \text{放物線 } y = f'(x) \text{ の軸が } -1 < x < 1 \text{ の範囲にある} & \cdots \textcircled{2} \\ f'(-1) > 0 & \cdots \textcircled{3} \\ f'(1) > 0 & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

をすべて満たすことと同値である。(1)より

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow b < a^2$$

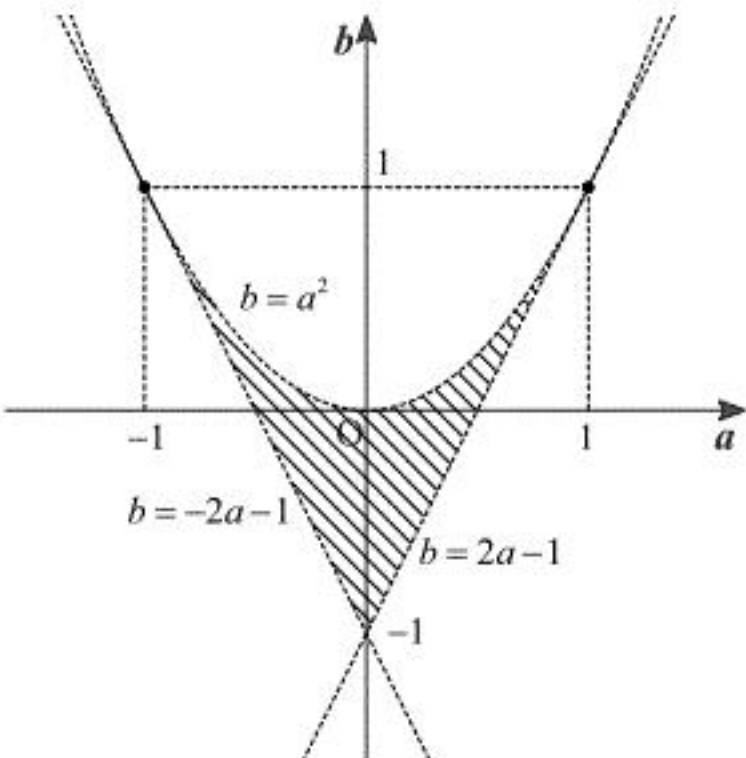
であり、また、 $f'(x) = (x + a)^2 - a^2 + b$ より放物線 $y = f'(x)$ の軸は $x = -a$ であるから、

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\Leftrightarrow -1 < -a < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < a < 1 \end{aligned}$$

である。さらに、

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &\Leftrightarrow 1 - 2a + b > 0 \\ &\Leftrightarrow b > 2a - 1 \\ \textcircled{4} &\Leftrightarrow 1 + 2a + b > 0 \\ &\Leftrightarrow b > -2a - 1 \end{aligned}$$

である。以上より、求める領域は下図のようになる。ただし、境界を除く。



(答) 上図(境界を除く)

(3)

上図の斜線部のうち、 $a > 0$ の部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{a^2 - (2a - 1)\} da &= \left[\frac{a^3}{3} - a^2 + a \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。 y 軸に関する対称性より、求める面積は $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$ である。

(答) $\frac{2}{3}$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

	①	②	③	④
(1)	$\frac{1}{y}$	xy	5	$\frac{5}{2}$
	⑤	⑥	⑦	
(2)	10	4θ	$\frac{\pi}{8}$	

〔解説〕

(1)

底の変換公式より

$$\log_{\frac{1}{2}} y = \frac{\log_2 y}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 y = \log_2 \frac{1}{y}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}} y + \log_2 (xy^2) &= \log_2 \frac{1}{y} + \log_2 (xy^2) \\ &= \log_2 \left(\frac{1}{y} \cdot xy^2 \right) \\ &= \log_2 (xy) \end{aligned}$$

となる。相加相乗平均の不等式から

$$xy = \sqrt{x^2 y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = 32$$

であり、等号成立は、

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 = 32 \\ \Leftrightarrow x &= y = 4\sqrt{2} \quad (\because x > 0, y > 0) \end{aligned}$$

のときである。したがって、 $\log_{\frac{1}{2}} y + \log_2 (xy^2)$ の最大値は $\log_2 32 = 5$ であり、そのときの x, y

の値は $x = y = 4\sqrt{2} = 2^{\frac{5}{2}}$ である。

(2)

θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき、 x, y は円 $x^2 + y^2 = 64$ 上の $x > y > 0$ の範囲を動くから、

$x - y > 0, x + y > 0, xy > 0$ が成り立つ。このことに注意すると、

$$\begin{aligned} \log_2 (x - y) + \log_2 (x + y) + \log_2 (xy) &= \log_2 \{ xy(x^2 - y^2) \} \\ &= \log_2 \{ 2^{12} \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \} \\ &= \log_2 (2^{11} \sin 2\theta \cos 2\theta) \\ &= \log_2 (2^{10} \sin 4\theta) \end{aligned}$$

となる。 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき、 $2^{10} \sin 4\theta$ は $\theta = \frac{\pi}{8}$ で最大値 2^{10} をとる。したがって

て、 $\log_2 (2^{10} \sin 4\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{8}$ で最大値 10 をとる。よって、 x, y が円 $x^2 + y^2 = 64$ 上の $x > y > 0$

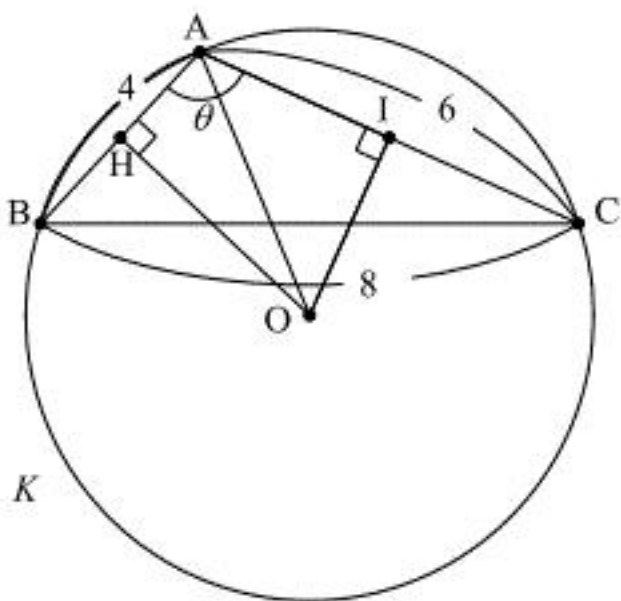
の範囲を動くとき、 $\log_2 (x - y) + \log_2 (x + y) + \log_2 (xy)$ は $\theta = \frac{\pi}{8}$ で最大値 10 をとる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$-\frac{1}{4}$	-6	$\frac{16\sqrt{15}}{15}$	8	18	$\frac{11}{15}$	$\frac{28}{45}$

〔解説〕



余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \\&= \frac{4^2 + 6^2 - 8^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} \\&= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \theta \\ &= 4 \cdot 6 \cdot -\frac{1}{4} \\ &= -6\end{aligned}$$

となる。 $0 < \theta < \pi$ より $\sin \theta > 0$ であるから、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

となる。よって、正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \theta} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{BC}{2 \sin \theta} = \frac{8}{2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{16\sqrt{15}}{15}$$

となる。次に、点 O から辺 AB へ降ろした垂線の足を H とする。OA = OB より AH = BH となるから、

$$\cos \angle OAB = \frac{AH}{OA} = \frac{4}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{16} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

であり

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \angle OAB = \frac{16\sqrt{15}}{15} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = 8$$

と求まる。同様に,

$$\cos \angle OAC = \frac{AI}{OA} = \frac{6}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

であるから、

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \angle OAC = \frac{16\sqrt{15}}{15} \cdot 6 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = 18$$

と求まる。一方、 $\overline{AO} \cdot \overline{AB}$, $\overline{AO} \cdot \overline{AC}$ を x, y で表すと

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = x|\overrightarrow{AB}|^2 + y\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 16x - 6y$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = x \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y |\overrightarrow{AC}|^2 = -6x + 36y$$

となるので

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{15} \\ y = \frac{28}{45} \end{cases}$$

を得る。