

【Ⅰ】

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。このとき、

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \theta = \cos \theta$$

であることに注意する。

(1)

点 P は辺 OA を $s:1-s$ に内分するから、 $\overrightarrow{OP} = s\vec{a}$ とかける。したがって、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CP}|^2 &= |\overrightarrow{OP} - \vec{c}|^2 \\ &= |s\vec{a} - \vec{c}|^2 \\ &= s^2 |\vec{a}|^2 - 2s\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &= s^2 - 2s \cos \theta + 1 \end{aligned}$$

となる。 $|\overrightarrow{CP}| > 0$ より、 $|\overrightarrow{CP}| = \sqrt{s^2 - 2s \cos \theta + 1}$ である。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{s^2 - 2s \cos \theta + 1}$$

(2)

点 Q は辺 OB を $t:1-t$ に内分するから、 $\overrightarrow{OQ} = t\vec{b}$ とかける。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} &= (\overrightarrow{OP} - \vec{c}) \cdot (\overrightarrow{OQ} - \vec{c}) \\ &= (s\vec{a} - \vec{c}) \cdot (t\vec{b} - \vec{c}) \\ &= st\vec{a} \cdot \vec{b} - s\vec{a} \cdot \vec{c} - t\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &= st \cos \theta - s \cos \theta - t \cos \theta + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad st \cos \theta - s \cos \theta - t \cos \theta + 1$$

(3)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CQ}|^2 &= |t\vec{b} - \vec{c}|^2 \\ &= t^2 |\vec{b}|^2 - 2t\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &= t^2 - 2t \cos \theta + 1 \end{aligned}$$

であるから、 $s+t=2 \cos \theta$ のとき

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CQ}|^2 &= (2 \cos \theta - s)^2 - 2(2 \cos \theta - s) \cos \theta + 1 \\ &= s^2 - 2s \cos \theta + 1 \\ &= |\overrightarrow{CP}|^2 \end{aligned}$$

となる。よって $|\overrightarrow{CP}| > 0$ 、 $|\overrightarrow{CQ}| > 0$ より $|\overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{CQ}|$ が成り立つ。

(証明終)

(4)

まず、 s のとりうる値の範囲を求める。 $s+t=2 \cos \theta$ より $t=2 \cos \theta - s$ であるから、 $0 < t < 1$ と合わせると

$$\begin{aligned} 0 &< 2 \cos \theta - s < 1 \\ \therefore 2 \cos \theta - 1 &< s < 2 \cos \theta \end{aligned}$$

となる。したがって、 s のとりうる値の範囲は、

$$0 < s < 1 \text{ かつ } 2 \cos \theta - 1 < s < 2 \cos \theta \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。このもとで $|\overrightarrow{PQ}|^2$ を s の関数として表すと、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}|^2 \\ &= |t\vec{b} - s\vec{a}|^2 \\ &= t^2 |\vec{b}|^2 - 2st \cos \theta + s^2 |\vec{a}|^2 \\ &= t^2 - 2st \cos \theta + s^2 \\ &= (2 \cos \theta - s)^2 - 2s(2 \cos \theta - s) \cos \theta + s^2 \\ &= 2(1 + \cos \theta)s^2 - 4 \cos \theta(1 + \cos \theta)s + 4 \cos^2 \theta \\ &= 2(1 + \cos \theta)(s - \cos \theta)^2 - 2 \cos^3 \theta + 2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $0 < \cos \theta < 1$ であり、 $2 \cos \theta - 1 < \cos \theta < 2 \cos \theta$ であるから、

$s = \cos \theta$ は①の範囲に含まれる。 $2(1 + \cos \theta) > 0$ であるから、 $|\overrightarrow{PQ}|^2$ は $s = \cos \theta$ で最小値をと

る。 $|\overrightarrow{PQ}| > 0$ より、 $|\overrightarrow{PQ}|$ も $s = \cos \theta$ で最小値をとる。

$$(\text{答}) \quad s = \cos \theta$$

【Ⅱ】

〔解答〕

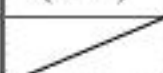
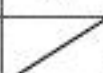
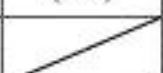
①	2
②	$\{f(x)\}^2 - 2f(x) - 2$
③	$b + 3$
④	-2
⑤	6
⑥	3
⑦	4

〔解説〕

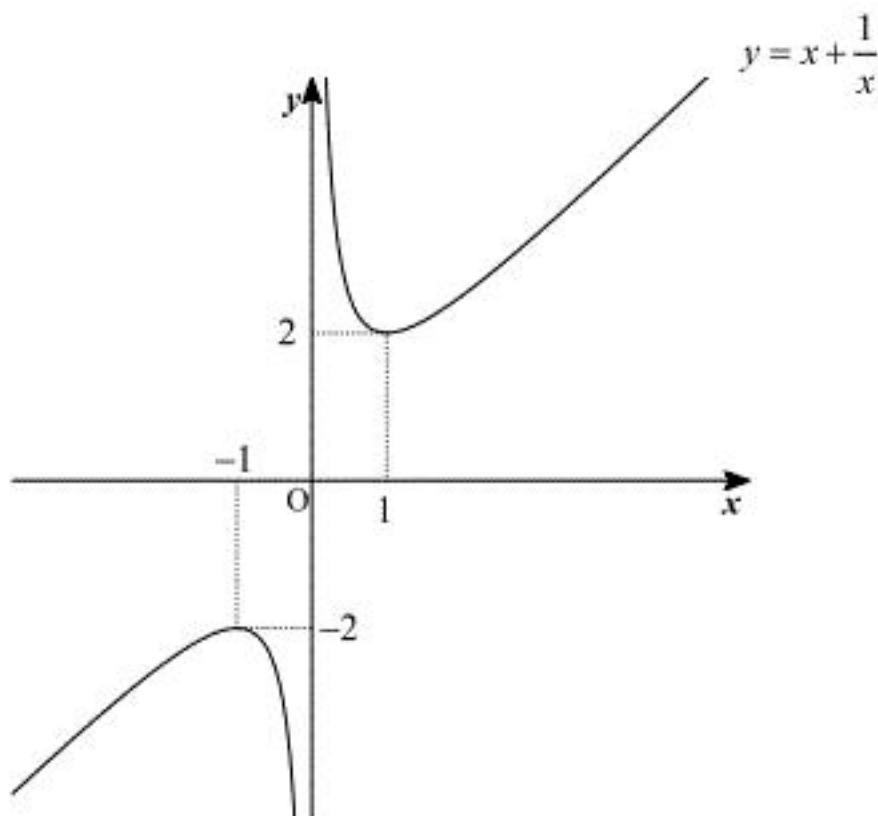
$f(x) = x + \frac{1}{x}$ の増減を調べる。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)(1+x)}{x^2} \end{aligned}$$

より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$(-\infty)$	...	-1	...	0	...	1	...	(∞)
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$			-2				2		

また $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ に注意すると、 $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



方程式 $f(x) = a$ の実数解の個数は、 xy 平面における曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ の共有点の個数に一致するので、求める実数解の個数は上図より、

- $|a| > 2$ のとき 2 個
- $|a| = 2$ のとき 1 個
- $|a| < 2$ のとき 0 個

である。また $g(x)$ について、

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 \\ &= \{f(x)\}^2 - 2f(x) - 2 \end{aligned}$$

と変形できるから、 $g(x) = b$ とすると、

$$\begin{aligned} g(x) &= b \\ \Leftrightarrow \{f(x)\}^2 - 2f(x) - 2 &= b \\ \Leftrightarrow \{f(x) - 1\}^2 &= b + 3 \\ \Leftrightarrow f(x) &= 1 \pm \sqrt{b + 3} \text{ かつ } b + 3 \geq 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 x が方程式 $g(x) = b$ の実数解であることと、 x が方程式 $f(x) = 1 + \sqrt{b + 3}$ 、または、 $f(x) = 1 - \sqrt{b + 3}$ の実数解であることは同値である。方程式 $f(x) = 1 + \sqrt{b + 3}$ の実数解の個数は、先に求めた結果より、

$$|1 + \sqrt{b + 3}| < 2 \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

$$|1 + \sqrt{b + 3}| = 2 \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$|1 + \sqrt{b + 3}| > 2 \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

である。これを整理して、

$$\begin{aligned} b &< -2 \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\ b &= -2 \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ b &> -2 \text{ のとき } 2 \text{ 個} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。同様に $f(x) = 1 - \sqrt{b + 3}$ の実数解の個数は、

$$|1 - \sqrt{b + 3}| < 2 \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

$$|1 - \sqrt{b + 3}| = 2 \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$|1 - \sqrt{b + 3}| > 2 \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

である。これを整理して、

$$\begin{aligned} b &< 6 \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\ b &= 6 \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ b &> 6 \text{ のとき } 2 \text{ 個} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。以上①、②より、 $g(x) = b$ すなわち、 $f(x) = 1 \pm \sqrt{b + 3}$ の解の個数は、

$$\begin{aligned} b &< -2 \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\ b &= -2 \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ -2 &< b < 6 \text{ のとき } 2 \text{ 個} \\ b &= 6 \text{ のとき } 3 \text{ 個} \\ 6 &< b \text{ のとき } 4 \text{ 個} \end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

(1)

題意より、

$$\begin{aligned}\{\sin(\log x)\}' &= \cos(\log x) \cdot (\log x)' \\ &= \frac{1}{x} \cos(\log x)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{x} \cos(\log x)$$

(2)

m を整数として、

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{x \cdot \frac{1}{x} \cos(\log x) - \sin(\log x)}{x^2} \\ &= \frac{\cos(\log x) - \sin(\log x)}{x^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \left\{ \cos\left(\frac{1}{4}\pi + 2m\pi\right) \cos(\log x) - \sin\left(\frac{1}{4}\pi + 2m\pi\right) \sin(\log x) \right\}}{x^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cos\left(\log x + \frac{1}{4}\pi + 2m\pi\right)}{x^2}\end{aligned}$$

となる。ここで $0 < g(1) < 2\pi$ より、

$$\begin{aligned}0 < \log 1 + \frac{1}{4}\pi + 2m\pi < 2\pi \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{8} < m < \frac{7}{8}\end{aligned}$$

となるので、これを満たす整数 m は $m=0$ のみである。したがって、

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2} \cos\left(\log x + \frac{1}{4}\pi\right)}{x^2}$$

と書ける。よって、 $\alpha = \sqrt{2}$ 、 $g(x) = \log x + \frac{1}{4}\pi$ である。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \sqrt{2}, \quad g(x) = \log x + \frac{1}{4}\pi$$

(3)

(2)より $f'(x) = \frac{\sqrt{2} \cos\left(\log x + \frac{1}{4}\pi\right)}{x^2}$ であり、 $\log x + \frac{1}{4}\pi$ が単調増加であるので $f(x)$ は、

$f'(x) = 0$ かつその前後で $f'(x)$ が正から負に符号変化する x で極大値をとる。また、 x は

$\log x > 0$ を満たすから、 $\log x + \frac{1}{4}\pi > \frac{1}{4}\pi$ となる。以上より自然数 n を用いて、

$$\begin{aligned}\log x + \frac{1}{4}\pi &= \frac{\pi}{2} + (2n-2)\pi \\ \Leftrightarrow \log x &= \left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi \\ \therefore x &= e^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi}\end{aligned}$$

と表せる。したがって $a_n = e^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi}$ である。

$$(\text{答}) \quad a_n = e^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi}$$

(4)

$S_n = \int_1^{e^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi}} \left| \frac{\sin(\log x)}{x} \right| dx$ について、 $\log x = t$ と置換すると $\frac{1}{x} dx = dt$ であり、

x	1	$\rightarrow$	$e^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi}$
t	0	$\rightarrow$	$\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi$

となる。よって、

$$\begin{aligned}S_n &= \int_1^{e^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi}} \left| \frac{\sin(\log x)}{x} \right| dx \\ &= \int_0^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi} |\sin t| dt\end{aligned}$$

となる。 $n \geq 2$ のときこの積分は、

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi} |\sin t| dt + \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} |\sin t| dt \right) + \int_{2(n-1)\pi}^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi} |\sin t| dt \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi} \sin t dt - \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \sin t dt \right) + \int_{2(n-1)\pi}^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi} \sin t dt \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left[-\cos t \right]_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi} - \left[-\cos t \right]_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \right) + \left[-\cos t \right]_{2(n-1)\pi}^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 4 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) \\ &= 4(n-1) - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \\ &= 4n - 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

となる。 $n=1$ のとき、

$$S_1 = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin t dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となり、これは $n=1$ でも成り立つ。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{n} \right) = 4$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = 4n - 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 4$$

【Ⅳ】

【解答】

①	5
②	$\frac{1}{2}$
③	1
④	$\frac{1}{2}\log 2$
⑤	2
⑥	5
⑦	$n-2$
⑧	n^2-3n+3

【解説】

(1)

A, B のくじの引き方はどれも同様に確からしい。A, B の 2 人がともに当たりくじを引く確率は、

$$\frac{2n}{n^2} \cdot \frac{2n-1}{n^2-1} = \frac{2(2n-1)}{n(n^2-1)}$$

である。一方 A, B の 2 人がともにはずれくじを引く確率は、

$$\frac{n^2-2n}{n^2} \cdot \frac{n^2-2n-1}{n^2-1} = \frac{(n-2)(n^2-2n-1)}{n(n^2-1)}$$

である。したがって、2 人とも当たる確率が、2 人ともはずれる確率より低くなるのは、

$$\begin{aligned} \frac{2(2n-1)}{n(n^2-1)} &< \frac{(n-2)(n^2-2n-1)}{n(n^2-1)} \\ \Leftrightarrow 2(2n-1) &< (n-2)(n^2-2n-1) \quad (\because n(n^2-1) > 0) \\ \Leftrightarrow n^3 - 4n^2 - n + 4 &> 0 \\ \Leftrightarrow (n-1)(n+1)(n-4) &> 0 \end{aligned}$$

となるときであり、 n は 2 以上の整数であるから、これが成り立つのは $n > 4$ 、すなわち $n \geq 5$ のとき。したがって求める n は $n = 5$ である。

(2)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ より,}$$

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

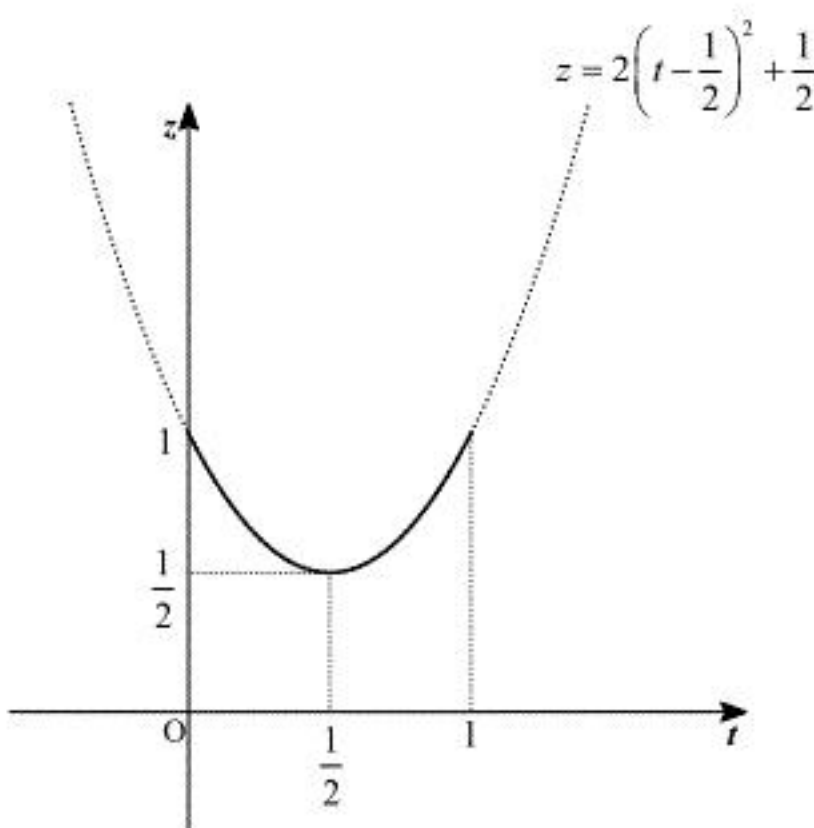
と書ける。したがって、

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 \\ &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \\ &= \cos^4 \theta + (1 - \cos^2 \theta)^2 \\ &= 2\cos^4 \theta - 2\cos^2 \theta + 1 \end{aligned}$$

となる。 $\cos^2 \theta = t$ とおくと、 t のとりうる値の範囲は $0 \leq t \leq 1$ である。 t を用いて z を書き直すと、

$$\begin{aligned} z &= 2t^2 - 2t + 1 \\ &= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。



したがって上図より、求める z のとりうる値の範囲は $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ となる。

(3)

真数条件より、

$$\begin{aligned} (e^{2x}-1)(e^x+1) &> 0 \text{ かつ } e^x+1 > 0 \text{ かつ } e^x-1 > 0 \\ \Leftrightarrow e^{2x} &> 1 \text{ かつ } e^x > 1 \\ \Leftrightarrow x &> 0 \end{aligned}$$

のもとで考える。また、 $\log(e^x-1)=0$ とすると、題の方程式を満たさないので、

$\log(e^x-1) \neq 0$ としてよく、両辺に $\log(e^x-1)$ をかけて整理すると、

$$\begin{aligned} \log\{(e^{2x}-1)(e^x+1)\} \log(e^x-1) + \{\log(e^x+1)\}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log\{(e^x-1)(e^x+1)^2\} \log(e^x-1) + \{\log(e^x+1)\}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{\log(e^x-1)\}^2 + 2\log(e^x-1)\log(e^x+1) + \{\log(e^x+1)\}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{\log(e^x-1) + \log(e^x+1)\}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{\log(e^{2x}-1)\}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log(e^{2x}-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{2x}-1 &= 1 \\ \therefore x &= \frac{1}{2}\log 2 \end{aligned}$$

を得る。これは真数条件を満たす。

(4)

$$\alpha = 1-2i, \beta = 1+2i$$

とおくと、

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{i}{4}(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) \\ &= \frac{i}{4}\{(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n - \beta^n)\} \\ &= (\alpha+\beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n \\ &= 2a_{n+1} - 5a_n \end{aligned}$$

となるので、 $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 5a_n = 0$ が成り立つ。

(5)

$$(n-1)^3 = a(n^2-2n+2) + b, \quad b > 0 \text{ かつ } 0 \leq b < n^2-2n+2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす整数 a, b を求めればよい。 n の整式とみなして除算を行うと、

$$(n-1)^3 = (n-1)(n^2-2n+2) + 1-n$$

となるが、 $n \geq 2$ のとき、 $1-n < 0$ となるので不適である。この式を変形すると、

$$\begin{aligned} (n-1)^3 &= (n-1)(n^2-2n+2) + 1-n \\ &= (n-2)(n^2-2n+2) + n^2-2n+2 + 1-n \\ &= (n-2)(n^2-2n+2) + n^2-3n+3 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $n^2-3n+3 = \left(n-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ であり、 $n \geq 2$ であるから、

$n^2-2n-2 - (n^2-3n+3) = n-1 > 0$ となる。したがって、 $a = n-2, b = n^2-3n+3$ は $\textcircled{1}$ を満たす。

したがって、求める整数 a, b は、 $a = n-2, b = n^2-3n+3$ となる。