

2020 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 90 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 a を正の数とする。放物線 $C_1: y = -ax^2 + a - \frac{1}{4a}$ 上の相異なる 2 点 A, B における C_1 の接線の交点を P とする。 $\triangle PAB$ が $\angle P = \frac{\pi}{2}$ である直角二等辺三角形となっているとする。次の問いに答えよ。

- (1) P の座標を a を用いて表せ。
- (2) 3 点 P, A, B を通る放物線を C_2 とする。 C_2 の方程式を求めよ。
- (3) 2 つの放物線 C_1, C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。

〔Ⅱ〕 辺 BC を斜辺とする直角三角形 ABC を考える。辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を P, 辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし, $0 \leq t \leq 1$ である。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PQ}$ となるとき t の値を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の重心を G とする。重心が, 3 本の中線の交点であり, それぞれを $2:1$ に内分する点であることより, $\overrightarrow{AG}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。
- (3) 直線 PQ は G を通らないことを示せ。

〔Ⅲ〕 さいころを 3 回投げて出た目を順に a, b, c とする。原点を O とし、点 $P(1, 0)$, 点 $A(a, b)$, 点 $B(-b, c)$ を考える。次の をうめよ。

(1) 点 A と点 B が原点 O を中心とする同一円周上にある確率は ① である。

(2) 点 A と点 B が点 P を中心とする同一円周上にある確率は ② である。

(3) $\triangle OAB$ の面積が 3 以上となる確率は ③ である。

(4) 点 A を頂点とし点 B を通る放物線が x 軸と相異なる 2 点で交わる確率は ④ である。

(5) 2 点 A, B からの距離が等しい点の軌跡の方程式と x 軸の交点が生点 O となる確率は ⑤ である。

〔Ⅳ〕 数列 $\{a_n\}$ について、すべての自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^n k a_k = n(n+1)(n+2)(n+3)$$

が成り立っている。次の をうめよ。

(1) $a_1 =$ ① $, a_2 =$ ② である。

(2) $a_n =$ ③ である。

(3) $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおくとき、 $S_n =$ ④ である。

(4) $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ とおくとき、 $T_n =$ ⑤ である。

(5) $\frac{23}{200} < T_n < \frac{3}{25}$ となる n の範囲は ⑥ である。

(以上)

