2020年度入学試験問題

数　　学

注　意　事　項

1．試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。

2．解答はすべて黒鉛筆(ＨＢ)〈シャープペンシルは，ＨＢ 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。

3．解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し，切取線から切り離してください。

4．試験時間は100分です。

5．問題は4ページで大問4問です。余白は計算用紙です。

6．解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 a を実数とし，$f(x)=x^4-\frac{3}{2}x^2+a$ とおく。関数 $y=f(x)$ のグラフを C とし，関数 $y=|x|$ のグラフを l とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数の値が 1 となる x の値を求めよ。

(2) $a=0$ のとき，C と l の共有点の個数を求めよ。

(3) C と l の共有点が 2 個となるための a の条件を求めよ。

〔Ⅱ〕 iを虚数単位とする。a, b, c, dを実数とし，$\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$とおく。次の $\boxed{}$ をうめよ。

複素数平面上の点zで，方程式

$$\alpha z + \beta \bar{z} + 1 + i = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

を満たすもの全体の集合をVとおく。zの実部，虚部をそれぞれx, yとする。(*)の両辺の実部を比較することにより，方程式

$$(\boxed{①})x - (\boxed{②})y + 1 = 0$$

が得られる。また，虚部を比較することにより，方程式

$$(\boxed{③})x + (\boxed{④})y + 1 = 0$$

が得られる。

Vがある直線上の点全体の集合と等しくなるための必要十分条件は，a, b, c, dを用いて表すと

$$(a,\ b) \neq (0,\ 0),\ c = \boxed{⑤},\ d = \boxed{⑥}$$

である。ただし，$\boxed{⑤}$ と $\boxed{⑥}$ はa, bを用いて表せ。この条件をα, βを用いて表すと

$$\alpha \neq 0,\ \beta = \boxed{⑦}$$

となる。

上の条件が成立するとき，Vの点に$1 - i$をかけて得られる点全体がつくる図形をWとする。VとWの共有点がiとなるようなαの値は $\boxed{⑧}$ である。

〔Ⅲ〕 座標平面上において，曲線 C は媒介変数 t を用いて

$$x = \sin t,\ y = \sin^3 t + \cos^3 t,\ -\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$$

と表示されているとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $t \neq \pm\frac{\pi}{2}$ のとき，$\frac{dy}{dx}$ を t の関数として求めよ。

(2) C の概形を解答欄の座標平面上に図示せよ。さらに，C と x 軸の交点の座標も記入せよ。ただし，曲線の凹凸は調べなくてもよい。

(3) 定数 a，b，c を用いて，$\cos^4 t = a\cos 4t + b\cos 2t + c$ と表す。a，b，c を求めよ。

(4) 直線 $x = 1$ と x 軸と y 軸，および C で囲まれた図形の面積を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) a を1と異なる正の数とする。$\log_a(x+2)+\log_{a^2}(x-1)=\log_a 4$ を解くと，$x=$ $\boxed{①}$ である。

(2) 座標平面において，ベクトル $\vec{a}=(2,\ 3)$ を考える。このとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ を満たすベクトル $\vec{b}$ の中で $|\vec{b}|$ が最小となるものは $\vec{b}=$ $\boxed{②}$ である。

(3) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とする。数列 $\{b_n\}$ の一般項は $\boxed{③}$ となる。$\{a_n\}$ の一般項は $\boxed{④}$ となる。

(4) 等式 $x+y+z+2w=7$ を満たす負でない整数 $x,\ y,\ z,\ w$ の組の個数は $\boxed{⑤}$ である。

(5) t を実数とする。座標空間の4点 P$(0,\ 2,\ 0)$，Q$(0,\ 0,\ 3)$，R$(0,\ t,\ 1)$，S$(t,\ 0,\ 1)$ に対して，線分PRと線分QSの長さの和が最小となる t の値は $\boxed{⑥}$ である。

(以上)