

2020 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔 I 〕 曲線 $C: y = \frac{1}{\sin 2x}$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ と直線 $\ell: y = 2$ で囲まれる図形を K とする。

(1) 関数 $f(x) = \frac{1}{\sin 2x}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。また、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ の交点の x 座標を求めよ。

(3) 不定積分 $\int \frac{1}{\sin 2x} dx$ を求めよ。

(4) 図形 K の面積 S を求めよ。

〔Ⅱ〕 O を原点とする座標空間に 2 点 $A(2, -1, 1)$, $B(-1, 2, 2)$ がある。

このとき、次の を数値でうめよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$ ① である。

(2) 点 $C(x, y, z)$ は成分 x が正であり、 $|\overrightarrow{OC}| = 5\sqrt{2}$ であるとする。 $\overrightarrow{OC}$ が
 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の両方に垂直であるとき、 $x^2 + y^2 + z^2 =$ ② であり、
 $x =$ ③ である。

(3) (2) の点 C と点 $D(1, 1, 1)$ を通る直線と平面 OAB の交点を E とする。

このとき、実数 s, t, u を用いて、 $\overrightarrow{OE} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{CE} = u\overrightarrow{CD}$ と表す
ことができ、 $s =$ ④ , $t =$ ⑤ , $u =$ ⑥ である。

〔Ⅲ〕 O を原点とする複素数平面上の点 $A(z)$ は、 $z^5 = 1$ かつ $z \neq 1$ を満たしている。

また、 z の偏角 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。このとき、次の をうめよ。

(1) $\cos 5\theta$ の値は ① である。

(2) θ の値は ② である。また、 θ の値を用いて z を極形式で表すと、

$z =$ ③ である。

(3) $z^4 + z^3 + z^2 + z$ の値は ④ である。また、 $t = z + \frac{1}{z}$ とする。

$z^4 + z^3 + z^2 + z =$ ④ の両辺を z^2 で割り、 t^2 の係数が 1 である t の 2 次

方程式で表すと ⑤ $= 0$ である。したがって、 $\cos \theta$ の値は ⑥

であることがわかる。

(4) 原点 O を中心とする半径 1 の円と点 $A(z)$ を中心とする半径 1 の円の 2 つ

の交点のうち、実部と虚部がともに正であるものを $B(w)$ とする。このとき、

w の偏角 θ' の値は ⑦ である。ただし、 w の偏角 θ' は $0 < \theta' < \frac{\pi}{2}$ と

する。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

- (1) 赤色のカードが2枚、白色のカードが3枚、黄色のカードが4枚の合計9枚のカードが箱の中に入っている。この箱から同時に3枚のカードを取り出すとき、取り出した3枚が異なる3色のカードである確率は ① であり、取り出した3枚のカードの色が2色である確率は ② である。

(2) $2^{-\frac{1}{8}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 4^{\text{ ③ }}$ である。

- (3) $a_n = \frac{n^3 - n}{3^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められた数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n \left(\text{ ④ } \right)}{3^{n+1}}$$

となるから、 a_n の最大値は ⑤ である。

- (4) n を3以上の自然数とする。周の長さが1である正 n 角形の外接円の半径を r_n 、周の長さが1である正 n 角形の面積を S_n とするとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \text{ ⑥ }, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \text{ ⑦ }$$

である。

(以上)

