

2020 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 60 分です。
5. 問題は 3 ページで大問 3 問です。余白は計算用紙です。

〔Ⅰ〕 3 次関数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$ を考える。ここで a, b は実数の定数である。

次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ が極大値と極小値をもつための条件を a と b の不等式で表せ。
- (2) $f(x)$ が $-1 < x < 1$ において、極大値と極小値をもつとき、点 (a, b) の存在する領域を所定の解答欄の座標平面上に図示せよ。そのとき、領域の境界線の方程式も書き入れること。ただし、その方程式の求め方は解答しなくてよい。
- (3) (2) で図示した領域とその境界からなる図形の面積 S を求めよ。

〔Ⅱ〕 $x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = 64$ とする。次の をうめよ。

(1) $\log_{\frac{1}{2}} y = \log_2$ ① であるから、

$$\log_{\frac{1}{2}} y + \log_2(xy^2) = \log_2(\text{ ② })$$

である。これより、 $\log_{\frac{1}{2}} y + \log_2(xy^2)$ は最大値 ③ をとり、そのとき

の x, y の値は $x = y = 2$ ④ である。

(2) $x = 8\cos\theta, y = 8\sin\theta$ とおく。 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき、

$$\log_2(x - y) + \log_2(x + y) + \log_2(xy)$$

は θ を用いて

$$\log_2(2 \text{ ⑤ } \sin \text{ ⑥ })$$

と表される。したがって、 (x, y) が円 $x^2 + y^2 = 64$ 上の $x > y > 0$ である部

分を動くとき、 $\log_2(x - y) + \log_2(x + y) + \log_2(xy)$ は最大値 ⑤ を

とり、そのときの θ の値は ⑦ である。

〔Ⅲ〕 次の を数値でうめよ。

平面上に三角形 ABC があり、各辺の長さは $AB = 4$, $BC = 8$, $CA = 6$ である。三角形 ABC の外接円 K の中心を O とする。 $\angle BAC = \theta$ とおくと、 $\cos \theta =$ ① であるので、三角形 ABC は鈍角三角形であり、 O は三角形 ABC の外部にあることがわかる。このときベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積は、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ② である。また K の半径の長さを R とすると $R =$ ③ である。

ここで

$$\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

とおく。 O が三角形 ABC の外心であることに注意して、次の内積を求めると

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \text{ ④ }, \quad \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = \text{ ⑤ }$$

である。これらを使って x , y を求めると $x =$ ⑥ , $y =$ ⑦ である。

(以上)

