

2020 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

[I] $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して, O, A, B, C を頂点とし,

$$OA = OB = OC = 1, \quad \angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \theta \text{ ラジアン}$$

となる四面体 OABC を考える。 $0 < s < 1$ を満たす s に対して, 辺 OA を $s : (1 - s)$ に内分する点を P とおく。また, $0 < t < 1$ を満たす t に対して, 辺 OB を $t : (1 - t)$ に内分する点を Q とおく。このとき次の問いに答えよ。

- (1) CP の長さを s, θ を用いて表せ。
- (2) 内積 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ}$ を s, t, θ を用いて表せ。
- (3) $s + t = 2 \cos \theta$ のとき, $CP = CQ$ となることを示せ。
- (4) (3) の仮定のもとで, PQ が最小となるときの s を θ を用いて表せ。

〔Ⅱ〕 2つの関数を

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^2 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

とする。次の をうめよ。

実数 a に対して、方程式 $f(x) = a$ は、 $|a| > \text{①}$ のとき 2 個の実数解、
 $|a| = \text{①}$ のとき 1 個の実数解をもち、 $|a| < \text{①}$ のとき実数解をも
たない。

関数 $g(x)$ は $f(x)$ を用いて

$$g(x) = \text{②}$$

と表される。したがって、実数 b に対して、 x が方程式 $g(x) = b$ の実数解であることと、 x が方程式 $f(x) = 1 + \sqrt{\text{③}}$ または $f(x) = 1 - \sqrt{\text{③}}$ の実数解であることは同値である。よって、 $b < \text{④}$ のとき $g(x) = b$ は実数解をもたない。また、 $g(x) = b$ は $b = \text{④}$ のとき実数解を 1 個、
 $\text{④} < b < \text{⑤}$ のとき実数解を 2 個、 $b = \text{⑤}$ のとき実数解を ⑥ 個、 $b > \text{⑤}$ のとき実数解を ⑦ 個もつ。

〔Ⅲ〕 関数 $f(x) = \frac{\sin(\log x)}{x}$ について、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $\sin(\log x)$ の導関数を求めよ。

(2) $f(x)$ の導関数を

$$f'(x) = \frac{\alpha \cos(g(x))}{x^2}$$

の形で表す。ただし、 α は正の定数で、 $g(x)$ は $0 < g(1) < 2\pi$ を満たすものとする。 α と $g(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ が極大となる x で $\log x > 0$ を満たすものを小さい方から順に $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ とおく。 a_n を求めよ。

(4) 1 以上の整数 n に対して

$$S_n = \int_1^{a_n} |f(x)| dx$$

とおく。 S_n および $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

- (1) n を 2 以上の整数とし、 $2n$ 本の当たりくじを含む n^2 本のくじがある。A、B の 2 人がこの順にくじを 1 本ずつ引く。ただし、A が引いたくじはもとに戻さないものとする。2 人とも当たる確率が 2 人ともはずれる確率より小さくなるような n の値のうち、最も小さいものは ① である。

- (2) a, b を正の定数とする。 x, y を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を満たす実数とするとき
- $$z = \left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4$$

のとりうる値の範囲は ② $\leq z \leq$ ③ である。

- (3) 方程式

$$\log((e^{2x} - 1)(e^x + 1)) + \frac{(\log(e^x + 1))^2}{\log(e^x - 1)} = 0$$

を解くと、 $x =$ ④ である。

- (4) 虚数単位 i を用いて

$$a_n = \frac{i}{4} \{(1 - 2i)^n - (1 + 2i)^n\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく。このとき、等式

$$a_{n+2} - \text{⑤} a_{n+1} + \text{⑥} a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。ただし、 ⑤ と ⑥ は実数である。

- (5) n を 2 以上の整数とする。整数 $(n - 1)^3$ を整数 $n^2 - 2n + 2$ で割ったときの商と余りは、それぞれ ⑦ , ⑧ である。

(以上)

