

〔I〕

(1)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 3b_n + 1 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + \frac{1}{2} &= 3\left(b_n + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} b_n + \frac{1}{2} &= 3^{n-1} \left(b_1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= 3^{n-1} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{3^n}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow b_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$$

となる。

$$(答) \quad b_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$$

(2)

条件式より、 $a_n > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{a_{n+1}}{5}} &= a_n \\ \Leftrightarrow \log_5 \sqrt[3]{\frac{a_{n+1}}{5}} &= \log_5 a_n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}(\log_5 a_{n+1} - 1) &= \log_5 a_n \\ \Leftrightarrow \log_5 a_{n+1} &= 3\log_5 a_n + 1 \\ \Leftrightarrow c_{n+1} &= 3c_n + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad c_{n+1} = 3c_n + 1$$

(3)

$$\begin{aligned} c_1 &= \log_5 a_1 \\ &= \log_5 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるから、(2)より、

$$b_n = c_n$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(3^n - 1) \\ \Leftrightarrow \log_5 a_n &= \frac{1}{2}(3^n - 1) \\ \Leftrightarrow a_n &= 5^{\frac{1}{2}(3^n - 1)} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad a_n = 5^{\frac{1}{2}(3^n - 1)}$$

ここで、すべての自然数 n に対して 3^n は奇数、 $3^n - 1$ は偶数である。したがって $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ は

自然数となる。ゆえに $5^{\frac{1}{2}(3^n - 1)}$ は奇数であり、すべての自然数 n に対して a_n は奇数である。

(証明終)

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤
-9	-1	0	$-9 < a < -1$	$a < -9$

〔解説〕

放物線 $y = (2-x)(1-2x)$ を放物線 D とし、放物線 D と直線 ℓ の接点の x 座標を t とする。

$$y = (2-x)(1-2x)$$

$$= 2x^2 - 5x + 2$$

$$y' = 4x - 5$$

であるから、接点の y 座標および接線の傾きについて

$$\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = at \\ 4t - 5 = a \end{cases}$$

が成り立つ。ここから、

$$2t^2 - 5t + 2 = (4t - 5)t$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 4t^2 - 5t$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow t = \pm 1$$

と求まる。よって、

$$t = 1 \text{ のとき } a = -1$$

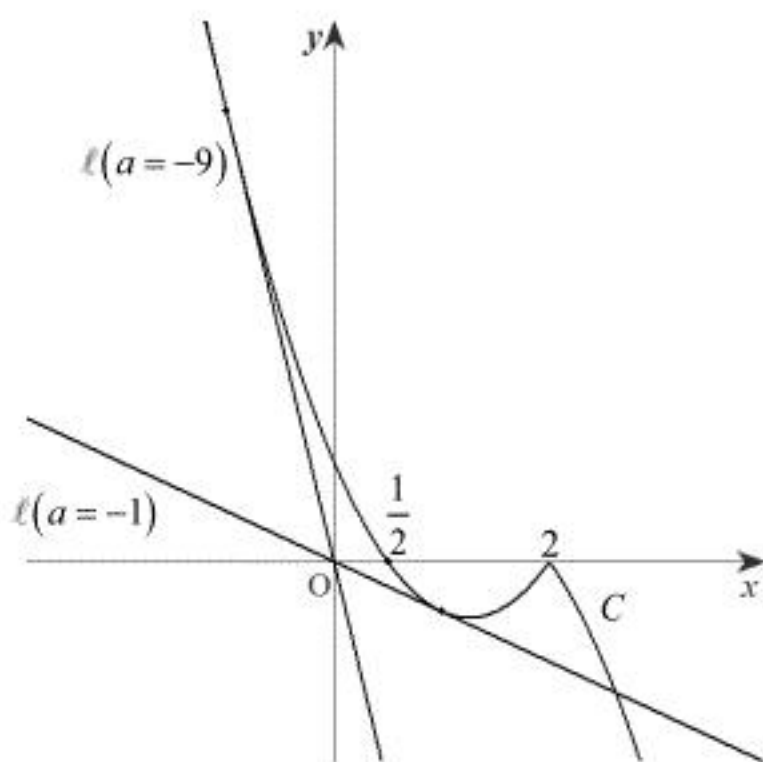
$$t = -1 \text{ のとき } a = -9$$

となる。次に、 C と ℓ の共有点の個数を調べる。曲線 C について

$$y = (2-x)(1-2x) \quad (x < 2)$$

$$y = (x-2)(1-2x) \quad (x \geq 2)$$

である。よって、 C と ℓ のグラフを図示すると下図のようになる。



上図より、 C と ℓ の共有点は、

$$a = 0, -1, -9 \text{ のとき } 2 \text{ つ}$$

$$a > 0, -9 < a < -1 \text{ のとき } 1 \text{ つ}$$

$$-1 < a < 0, a < -9 \text{ のとき } 3 \text{ つ}$$

である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
2	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$	π	$\sqrt{3}$	-2	$1+\sqrt{2}$

〔解説〕

$$\begin{aligned}
 g(x) &= -\sin f(x) - \sqrt{3} \cos f(x) \\
 &= 2 \left(\sin f(x) \cos \frac{4}{3}\pi + \cos f(x) \sin \frac{4}{3}\pi \right) \\
 &= 2 \sin \left(f(x) + \frac{4}{3}\pi \right)
 \end{aligned}$$

と変形できる。

$$\begin{aligned}
 f(x) + \frac{4}{3}\pi &= \pi \left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}x \right) + \frac{4}{3}\pi \\
 &= \pi \left\{ \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right\}
 \end{aligned}$$

であるから、 $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ において $f(x) + \frac{4}{3}\pi$ は、

$$\text{最大値 } \frac{7}{3}\pi \quad (x = \sqrt{3} \text{ のとき})$$

$$\text{最小値 } \pi \quad (x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき})$$

をとる。よって、

$$\pi \leq f(x) + \frac{4}{3}\pi \leq \frac{7}{3}\pi$$

であり、 $f(x) + \frac{4}{3}\pi$ は連続関数であるから、

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq \sin \left(f(x) + \frac{4}{3}\pi \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \Leftrightarrow -2 &\leq g(x) \leq \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $g(x)$ の最大値、最小値は確かに存在し、

$$\text{最大値 } \sqrt{3}, \text{ 最小値 } -2$$

である。また、

$$\begin{aligned}
 g(x) &= -\sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow 2 \sin \left(f(x) + \frac{4}{3}\pi \right) &= -\sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow \sin \left(f(x) + \frac{4}{3}\pi \right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \Leftrightarrow f(x) + \frac{4}{3}\pi &= \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \quad (\because \pi \leq f(x) + \frac{4}{3}\pi \leq \frac{7}{3}\pi) \\
 \Leftrightarrow f(x) &= 0, \frac{\pi}{3} \\
 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}x &= 0, \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

である。 $x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}x = 0$ を解くと、

$$\begin{aligned}
 x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}x &= 0 \\
 \Leftrightarrow x \left(x - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= 0, \frac{2}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

と求まる。また $x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}x = \frac{1}{3}$ を解くと、

$$\begin{aligned}
 x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}x &= \frac{1}{3} \\
 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{3} &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad (\because 0 \leq x \leq \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

と求まる。