

〔I〕

(1)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2a_n &= 4^n \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{2a_n}{2^{n+1}} &= \frac{4^n}{2^{n+1}} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n &= 2^{n-1} \\ \therefore b_{n+1} &= b_n + 2^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_{n+1} = b_n + 2^{n-1}$$

(2)

$c=2$ のとき,

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。 $d_n = 2^{n-1}$ とすると, 数列 $\{d_n\}$ は数列 $\{b_n\}$ の階差数列であるから, $n \geq 2$ において

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= 1 + 1 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

となる。また, この b_n の式は $n=1$ でも成り立つから, すべての自然数 n において $b_n = 2^{n-1}$ である。よって

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n b_n \\ &= 2^n \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{2n-1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2^{2n-1}$$

(3)

$c=-10^{100}$ のとき, 先ほどと同様に $n \geq 2$ において

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k \\ &= -\frac{10^{100}}{2} + 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

となる。この b_n の式は $n=1$ でも成り立つから, すべての自然数 n において,

$$b_n = -\frac{10^{100}}{2} + 2^{n-1} - 1$$

である。よって

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n b_n \\ &= 2^n \left(-\frac{10^{100}}{2} + 2^{n-1} - 1 \right) \\ &= 2^{n-1} (2^n - 10^{100} - 2) \end{aligned}$$

である。 $a_n \geq 0$ となるとき,

$$2^{n-1} (2^n - 10^{100} - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 10^{100} \leq 2^n - 2$$

である。ここで, $10^{100} \neq 2^n$ であり, かつ 10^{100} と 2^n はともに偶数であるから,

$$10^{100} \leq 2^n - 2 \Leftrightarrow 10^{100} < 2^n$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} a_n &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 10^{100} &< 2^n \\ \Leftrightarrow 100 &< n \log_{10} 2 \\ \Leftrightarrow 100 &< 0.3010n \\ \Leftrightarrow n &> \frac{100}{0.3010} = 332.2... \end{aligned}$$

となり, $a_n \geq 0$ となる最小の n は,

$$n = 333$$

である。

$$(\text{答}) \quad n = 333$$

【Ⅱ】

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$	0	2	$-\frac{4a-1}{2a^2}$	$2y^2-4y$	$\frac{\sqrt{2}}{48}$

〔解説〕

l と C が接するとき、接点の x 座標を t とする。 $y = \sqrt{x+1}$ を微分すると、

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

であるから、接点における C の接線の傾きは $\frac{1}{2\sqrt{t+1}}$ である。このとき $\sqrt{t+1} > 0$ 、すなわち

$t+1 > 0$ である。接点の y 座標と接線の傾きについて、

$$\begin{cases} at+2 = \sqrt{t+1} \\ a = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \end{cases}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \cdot t + 2 &= \sqrt{t+1} \\ \Leftrightarrow \frac{t}{2} + 2\sqrt{t+1} &= t+1 \quad (\because \sqrt{t+1} > 0) \\ \Leftrightarrow 4\sqrt{t+1} &= t+2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 16(t+1) = (t+2)^2 \\ t+2 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 12t - 12 = 0 \\ t+2 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow t &= 6 \pm 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

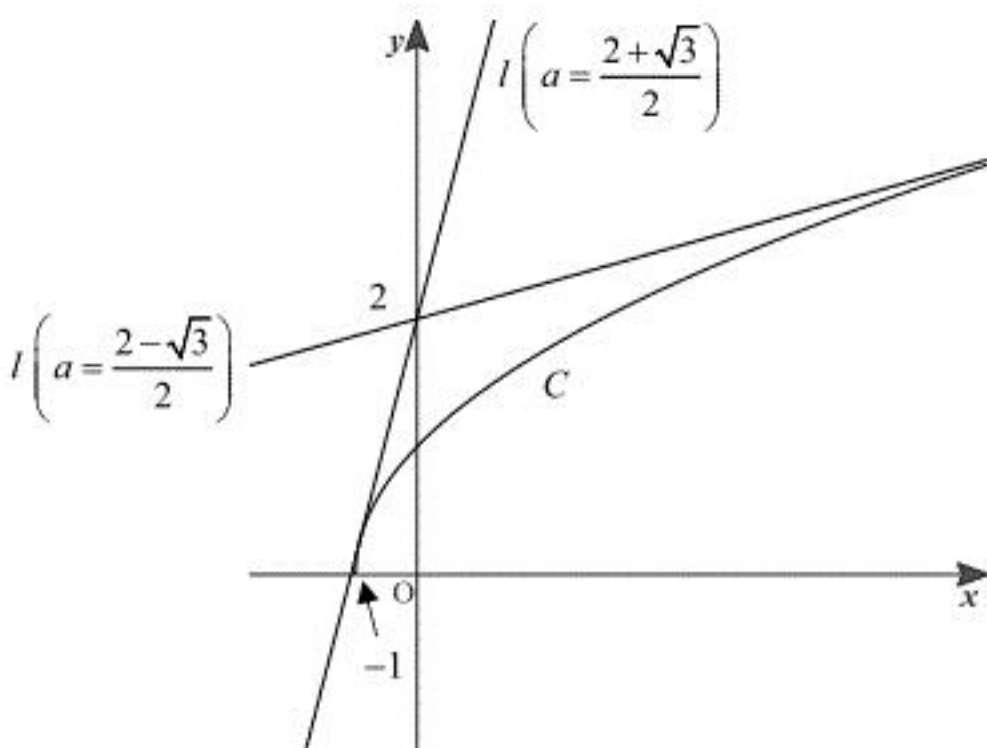
と求まる。 $t = 6 + 4\sqrt{3}$ のとき

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6+4\sqrt{3}+1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}} \\ &= \frac{1}{2(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

であり、 $t = 6 - 4\sqrt{3}$ のとき

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6-4\sqrt{3}+1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{12}}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2}} \\ &= \frac{1}{2(2-\sqrt{3})} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。したがって l と C のグラフは下図のようになる。



l が点 $(-1, 0)$ を通るとき

$$0 = a \cdot (-1) + 2 \Leftrightarrow a = 2$$

となる。また直線 l は $y = ax + 2$ より a の値に関わらず定点 $(0, 2)$ を通る。よって上図より l と C が異なる 2 つの共有点をもつための条件は

$$0 < a < \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2} < a \leq 2$$

である。この条件を満たし l と C が異なる 2 つの共有点をもつときについて考える。 $x \geq -1$ において l と C の式を連立すると

$$\begin{aligned} ax+2 &= \sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow (ax+2)^2 &= x+1 \\ \Leftrightarrow a^2x^2 + (4a-1)x+3 &= 0 \end{aligned}$$

となる。共有点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、 α, β はこの x の 2 次方程式の異なる 2 つ

の実数解である。解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = -\frac{4a-1}{a^2}$ である。ここで 2 つの共有点の中点

M の座標を M(X, Y) とすると

$$\begin{aligned} X &= \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \Leftrightarrow X &= -\frac{4a-1}{2a^2} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と求まる。また点 M は直線 l 上の点であるから、 y 座標は

$$\begin{aligned} Y &= aX + 2 \\ \Leftrightarrow Y &= \frac{1}{2a} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と求まる。②より $a = \frac{1}{2Y}$ であり、これを①に代入して

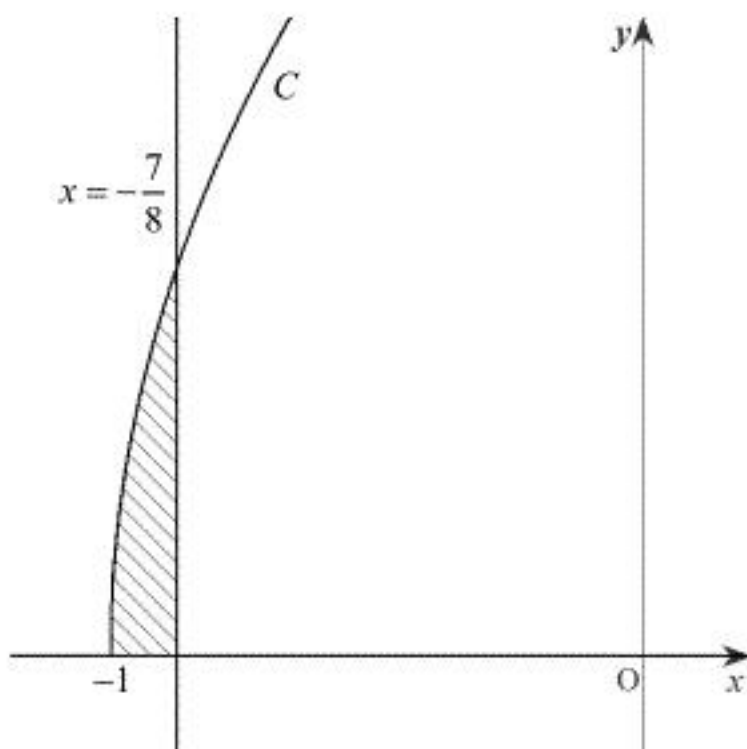
$$\begin{aligned} X &= -\frac{4 \cdot \frac{1}{2Y} - 1}{2\left(\frac{1}{2Y}\right)^2} \\ &= 2Y^2 - 4Y \end{aligned}$$

となるから、M は $x = 2y^2 - 4y$ 上の点である。次に、 $S(a)$ について考える。 $a = 2$ のとき M

の x 座標は、

$$\begin{aligned} x &= -\frac{4a-1}{2a^2} \\ &= -\frac{7}{8} \end{aligned}$$

であるので、 $S(2)$ は下図の斜線部分の面積である。



したがって

$$\begin{aligned} S(2) &= \int_{-1}^{-\frac{7}{8}} \sqrt{x+1} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^{-\frac{7}{8}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{48} \end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅲ〕

(1)

$y = \log(x+1)$ を微分すると $y' = \frac{1}{x+1}$ であるから、点 $A(a, \log(a+1))$ における接線は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{a+1}(x-a) + \log(a+1) \\ &= \frac{1}{a+1}x + \log(a+1) - \frac{a}{a+1} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$B\left(0, \log(a+1) - \frac{a}{a+1}\right)$$

である。点 C は線分 AB を $2:1$ に内分するから、座標を $C(X, Y)$ とすると

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3} \cdot a + \frac{2}{3} \cdot 0 \\ &= \frac{a}{3} \\ Y &= \frac{1}{3} \cdot \log(a+1) + \frac{2}{3} \cdot \left(\log(a+1) - \frac{a}{a+1}\right) \\ &= \log(a+1) - \frac{2a}{3(a+1)} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \ C\left(\frac{a}{3}, \log(a+1) - \frac{2a}{3(a+1)}\right)$$

(2)

直線 CD は直線 AB と直交する点 C を通る直線であるから、傾きは

$$-\frac{1}{\frac{1}{a+1}} = -(a+1)$$

であり、

$$\begin{aligned} y &= -(a+1)\left(x - \frac{a}{3}\right) + \log(a+1) - \frac{2a}{3(a+1)} \\ &= -(a+1)x + \log(a+1) + \frac{a(a^2 + 2a - 1)}{3(a+1)} \end{aligned}$$

と表せる。したがって点 D の座標は、

$$D\left(0, \log(a+1) + \frac{a(a^2 + 2a - 1)}{3(a+1)}\right)$$

である。直線 AD が x 軸と平行となるとき、点 A と点 D の y 座標が等しいから、

$$\begin{aligned} \log(a+1) &= \log(a+1) + \frac{a(a^2 + 2a - 1)}{3(a+1)} \\ \Leftrightarrow \frac{a(a^2 + 2a - 1)}{3(a+1)} &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -1 + \sqrt{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \ a = -1 + \sqrt{2}$$

(3)

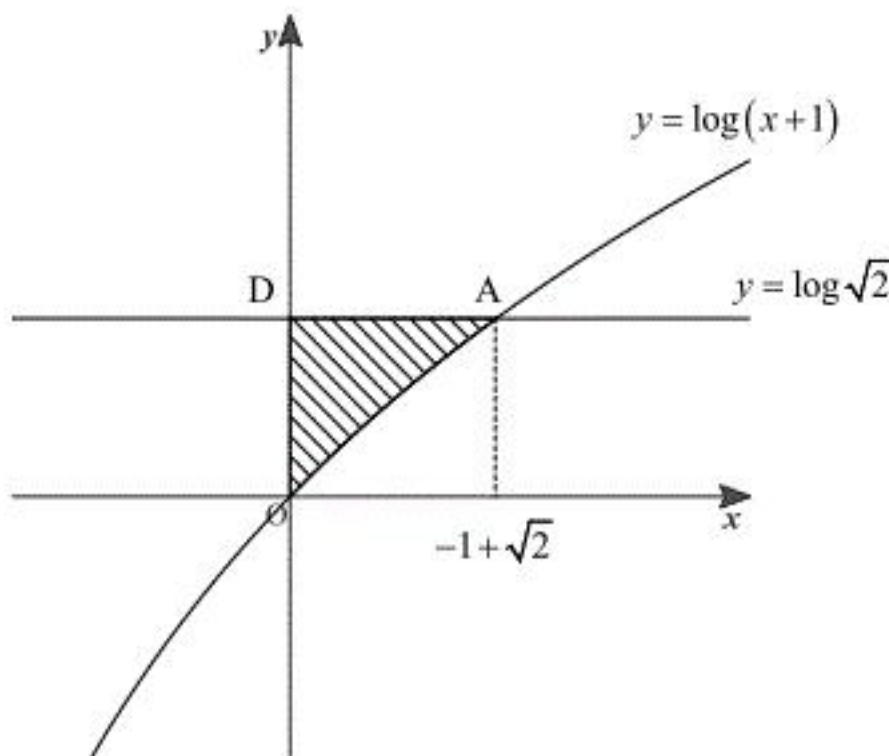
直線 AD が x 軸と平行となるとき、点 A の座標は、

$$A(-1 + \sqrt{2}, \log \sqrt{2})$$

である。また、直線 AD の式は、

$$y = \log \sqrt{2}$$

である。求める面積を S とすると、 S は下図の斜線部分の面積である。



上図より

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{-1+\sqrt{2}} (\log \sqrt{2} - \log(x+1)) dx \\ &= \left[(\log \sqrt{2})x - (x+1)\log(x+1) \right]_0^{-1+\sqrt{2}} + \int_0^{-1+\sqrt{2}} \frac{x+1}{x+1} dx \\ &= (\sqrt{2} - 1)\log \sqrt{2} - \sqrt{2}\log \sqrt{2} + [x]_0^{-1+\sqrt{2}} \\ &= -\log \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \ -\log \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}$$

【Ⅳ】

【解答】

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$\left(2, \frac{5}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{1}{4}$	$\frac{121}{36}$	$(-1+a, \sqrt{3}-a)$	$\sqrt{3}-1$

【解説】

(1)

$a \leq 0$ であるとき $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{4x^2 + 5x + 6} - (ax + b) \right\} = \infty$ となるから、不適である。よって、 $a > 0$ で

ある。ここで、 $a > 0$ のとき、十分大きな x に対して $\sqrt{4x^2 + 5x + 6} + (ax + b) > 0$ となるから、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{4x^2 + 5x + 6} - (ax + b) \right\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 + 5x + 6} \right)^2 - (ax + b)^2}{\sqrt{4x^2 + 5x + 6} + (ax + b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4 - a^2)x^2 + (5 - 2ab)x + 6 - b^2}{\sqrt{4x^2 + 5x + 6} + (ax + b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4 - a^2)x + (5 - 2ab) + \frac{6 - b^2}{x}}{\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + \left(a + \frac{b}{x} \right)} \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

となる。ここで、(*)の分母は $x \rightarrow \infty$ の極限で

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + \left(a + \frac{b}{x} \right) \right\} = 2 + a$$

に収束するので、(*)の分子が $x \rightarrow \infty$ の極限で 0 に収束することが、

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{4x^2 + 5x + 6} - (ax + b) \right\} = 0$ が成立することの必要十分条件である。よって、

$$\begin{cases} 4 - a^2 = 0 \\ 5 - 2ab = 0 \end{cases} \\ \therefore (a, b) = \left(2, \frac{5}{4} \right) \quad (\because a > 0)$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i}{\sqrt{3}+i} \\ &= \frac{\{(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i\}(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} \\ &= \frac{4+4i}{4} \\ &= 1+i \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} i \right) \end{aligned}$$

となるから、

$$\arg \frac{\beta}{\alpha} = \arg \beta - \arg \alpha = \frac{\pi}{4}$$

である。また、

$$\alpha = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

と表せるから、

$$\arg \alpha = \frac{\pi}{6}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \arg \beta &= \arg \frac{\beta}{\alpha} + \arg \alpha \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{5}{12}\pi \end{aligned}$$

である。

(3)

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とする。このとき、

$$\begin{aligned} x^3 - 3a^2x + 80b &= 0 \text{ が虚数解をもたない} \\ \Leftrightarrow f(x) = -80b \text{ が } 3 \text{ つの実数解を持つ(重解を含む)} \end{aligned}$$

である。以下、 $y = f(x)$ と $y = -80b$ のグラフの共有点を考える。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3a^2 \\ &= 3(x+a)(x-a) \end{aligned}$$

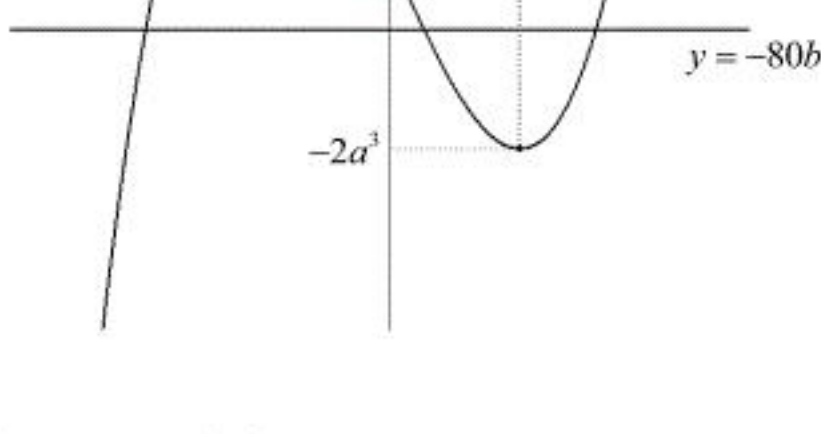
であるから、 $y = f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より、 $y = f(x)$ は、 $x = -a$ で極大値、 $x = a$ で極小値を持つ。ここで、

$$f(-a) = 2a^3, f(a) = -2a^3$$

である。よって、 $y = f(x)$ と $y = -80b$ のグラフは次のようになる。



$b > 0$ より、 $-80b < 0$ であることに注意すると、上図から、

$$\begin{aligned} -2a^3 &\leq -80b \\ \Leftrightarrow 40b &\leq a^3 \end{aligned}$$

であればよい。これを満たす (a, b) は、

$$(a, b) = (4, 1), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)$$

の 9 組である。よって、求める確率は、

$$\frac{9}{6^2} = \frac{1}{4}$$

である。

(4)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \left(\sin \theta + \frac{1}{2 \sin \theta} \right)^2 + \left(\cos \theta + \frac{1}{3 \cos \theta} \right)^2 \\ &= \sin^2 \theta + 1 + \frac{1}{4 \sin^2 \theta} + \cos^2 \theta + \frac{2}{3} + \frac{1}{9 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1 - \cos 2\theta} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{1 + \cos 2\theta} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{9(1 + \cos 2\theta) + 4(1 - \cos 2\theta)}{18(1 - \cos 2\theta)(1 + \cos 2\theta)} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{1}{18} \left(\frac{5 \cos 2\theta + 13}{1 - \cos^2 2\theta} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで $x = \cos 2\theta$ 、 $g(x) = \frac{5x+13}{1-x^2}$ とすると、 $g(x)$ が最小値をとるとき $f(\theta)$ も最小

値をとる。ただし $0 < 2\theta < \pi$ より $-1 < x < 1$ である。 $g(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{5(1-x^2) - (5x+13) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{5x^2 + 26x + 5}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{(5x+1)(x+5)}{(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

であるから、 $-1 < x < 1$ における $g(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{5}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって $g(x)$ は $x = -\frac{1}{5}$ で極小かつ最小となり、その値は $\frac{25}{2}$ である。このとき $f(\theta)$ も最

小値をとり、その値は

$$\frac{8}{3} + \frac{1}{18} \cdot \frac{25}{2} = \frac{121}{36}$$

である。

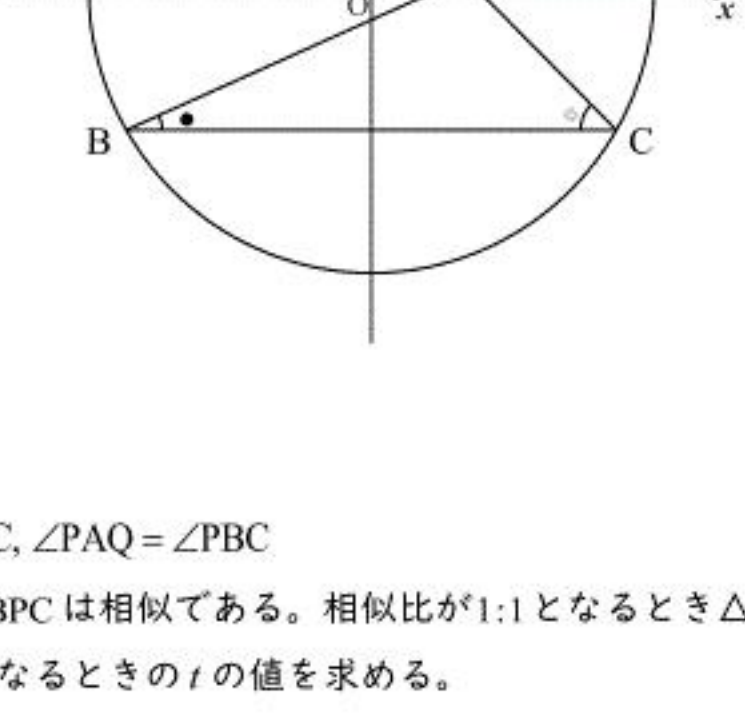
(5)

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= (1-t)\overline{OA} + t\overline{OC} \\ &= (-1-t) + \sqrt{3}t, \sqrt{3}(1-t)-t \\ &= (-1+(1+\sqrt{3})t, \sqrt{3}-(1+\sqrt{3})t) \\ &= (-1+a, \sqrt{3}-a) \end{aligned}$$

である。よって、P の座標は

$$P(-1+a, \sqrt{3}-a)$$

と表される。ここで、問題文の状況を図示すると以下のようになる。



円周角の定理より、

$$\angle APQ = \angle BPC, \angle PAQ = \angle PBC$$

となり、 $\triangle APQ$ と $\triangle BPC$ は相似である。相似比が $1:1$ となると $\triangle APQ$ と $\triangle BPC$ は合同と

なるから、 $AP = BP$ となるときの t の値を求める。

$$\begin{aligned} AP &= BP \\ \Leftrightarrow AP^2 &= BP^2 \\ \Leftrightarrow \{ -1+a - (-1) \}^2 + \{ \sqrt{3}-a - \sqrt{3} \}^2 &= \{ -1+a - (-\sqrt{3}) \}^2 + \{ \sqrt{3}-a - (-1) \}^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + (-a)^2 &= (\sqrt{3}-1+a)^2 + (\sqrt{3}+1-a)^2 \\ \Leftrightarrow 2a^2 &= 2a^2 - 4a + 8 \\ \Leftrightarrow a &= 2 \end{aligned}$$

である。 $a = (1+\sqrt{3})t$ であるから

$$\begin{aligned} t &= \frac{2}{1+\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3}-1 \end{aligned}$$

と求まる。これは $0 < t < 1$ を満たすので適する。