

2021 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 c を定数とし、数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} - 2a_n = 4^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定められているとする。次の問いに答えよ。

- (1) $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおく。 b_{n+1} を b_n を用いた式で表せ。
- (2) $c = 2$ のとき、 a_n を n を用いた式で表せ。
- (3) $c = -10^{100}$ のとき、 $a_n \geq 0$ となる最小の n を求めよ。

ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

〔Ⅱ〕 a を定数とし、直線 $l: y = ax + 2$ および曲線 $C: y = \sqrt{x+1}$ を考える。次の をうめよ。

l と C が接するのは $a =$ ① , ② のときである。ただし、
 ① $<$ ② とする。

l と C が異なる 2 つの共有点をもつための必要十分条件は、

$$\text{③} < a < \text{①}$$

または

$$\text{②} < a \leq \text{④}$$

である。

l と C が異なる 2 つの共有点をもつとき、2 つの共有点の中点を M とおく。このとき、 M の x 座標は a を用いた式で ⑤ と表される。さらに、 M は a の値によらず、曲線 $x =$ ⑥ 上の点である。ただし、 ⑥ は x を含まない y のみの式とする。

C と x 軸および直線 $x =$ ⑤ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とおく。
 $a =$ ④ のとき、 $S(a)$ の値は ⑦ である。

〔Ⅲ〕 $a > 0$ とし、曲線 $y = \log(x + 1)$ 上の点 $A(a, \log(a + 1))$ における接線が、 y 軸と交わる点を B とおく。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を $2 : 1$ に内分する点を C とおく。 C の座標を a を用いて表せ。

(2) C を通り、直線 AB と直交する直線が y 軸と交わる点を D とおく。

直線 AD が x 軸と平行となるときの a の値を求めよ。

(3) 直線 AD が x 軸と平行となるとき、直線 AD 、 y 軸および曲線 $y = \log(x + 1)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

- (1) 定数 a, b に対して, 等式

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{4x^2 + 5x + 6} - (ax + b)\} = 0$$

が成り立つとき, $(a, b) =$ である。

- (2) i を虚数単位とし,

$$\alpha = \sqrt{3} + i, \quad \beta = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i$$

とおく。このとき, $\frac{\beta}{\alpha}$ の偏角は であり, β の偏角は である。ただし, 複素数 z の偏角 θ は, $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で考える。

- (3) 1 個のさいころを 2 回投げ, 1 回目に出る目を a , 2 回目に出る目を b とする。このとき, 3 次方程式 $x^3 - 3a^2x + 80b = 0$ が虚数解をもたない確率は

である。

- (4) 関数

$$f(\theta) = \left(\sin \theta + \frac{1}{2\sin \theta} \right)^2 + \left(\cos \theta + \frac{1}{3\cos \theta} \right)^2 \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

の最小値は である。

- (5) 円 $S: x^2 + y^2 = 4$ 上に 3 点 $A(-1, \sqrt{3})$, $B(-\sqrt{3}, -1)$, $C(\sqrt{3}, -1)$ をとり, $0 < t < 1$ に対して, 線分 AC を $t: (1-t)$ に内分する点を P とする。 $a = (1 + \sqrt{3})t$ とおくと, P の座標は a を用いた式で と表される。さらに, 直線 BP と S の交点のうち, B とは異なるものを Q とする。 $\triangle APQ$ と $\triangle BCP$ が合同となる時, t の値は である。

(以上)