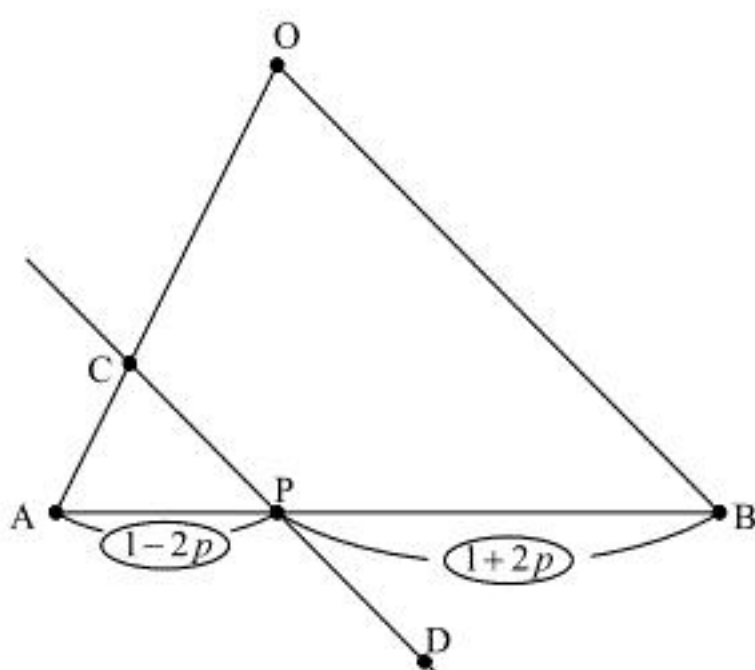


〔Ⅰ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
$\frac{1+2p}{2}$	$\frac{1-2p}{2}$	$1-2p$	$12p^2-8p+5$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{33}}{3}$

〔解説〕



問題の設定より、

$$\begin{aligned} AP:BP &= (AB-BP):BP \\ &= \{2-(1+2p)\}:(1+2p) \\ &= (1-2p):(1+2p) \end{aligned}$$

とわかる。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{(1+2p)\overrightarrow{OA}+(1-2p)\overrightarrow{OB}}{(1-2p)+(1+2p)} \\ &= \frac{1+2p}{2}\vec{a}+\frac{1-2p}{2}\vec{b} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$$

であり、 $\overrightarrow{OC}$ と $\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{CP}$ と $\vec{b}$ がそれぞれ平行であることを考えると、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OC}=\left(\frac{1+2p}{2}\right)\vec{a} \\ \overrightarrow{CP}=\left(\frac{1-2p}{2}\right)\vec{b} \end{cases}$$

であることがわかる。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{CP} \\ &= \left(\frac{1+2p}{2}\right)\vec{a}+(1-2p)\vec{b} \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OD}|^2 &= \left|\left(\frac{1+2p}{2}\right)\vec{a}+(1-2p)\vec{b}\right|^2 \\ &= \left(\frac{1+2p}{2}\right)^2|\vec{a}|^2+(1+2p)(1-2p)(\vec{a}\cdot\vec{b})+(1-2p)^2|\vec{b}|^2 \\ &= (1+4p+4p^2)+(1-4p^2)+3(1-4p+4p^2)\left(\because |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=\sqrt{3}, \vec{a}\cdot\vec{b}=1\right) \\ &= 12p^2-8p+5 \\ &= 12\left(p-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{11}{3} \end{aligned}$$

となる。 $|\overrightarrow{OD}|>0$ であるから、 $|\overrightarrow{OD}|^2$ が最小となるときに $|\overrightarrow{OD}|$ も最小となるため、 $-\frac{1}{2}<p<\frac{1}{2}$

から、 $|\overrightarrow{OD}|$ は $p=\frac{1}{3}$ のときに最小値 $\sqrt{\frac{11}{3}}=\frac{\sqrt{33}}{3}$ をとる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
1	$-b_n$	$(-1)^{n-1}$	$2k+1$	$-2k$	$(-1)^k$

〔解説〕

問題文より

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。また、与えられた漸化式を変形すると

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -a_n + \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= -a_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{n+2} &= -\left(a_n - \frac{1}{n+1}\right) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= -b_n \end{aligned}$$

となる。上記の漸化式より、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=1$ 、公比 -1 の等比数列とわかる。よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = (-1)^{n-1}$$

となる。さらに、 $k=1, 2, 3, \dots$ とすると

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= b_{2k-1} + \frac{1}{(2k-1)+1} \\ &= (-1)^{2k-2} + \frac{1}{2k} \\ &= 1 + \frac{1}{2k} \\ &= \frac{2k+1}{2k} \\ a_{2k} &= b_{2k} + \frac{1}{2k+1} \\ &= (-1)^{2k-1} + \frac{1}{2k+1} \\ &= -1 + \frac{1}{2k+1} \\ &= -\frac{2k}{2k+1} \end{aligned}$$

と表される。したがって、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $2k$ 項までの積は

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \cdots a_{2k} &= \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdots \frac{2k+1}{2k} \cdot \left(-\frac{2k}{2k+1}\right) \\ &= (-1)^k \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

(1)

$0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}$ より $0 < x + y < \pi$ であるから

$$\cos(x + y) = 0 \Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{2}$$

とわかる。 $x^2 = \pi y \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{\pi}$ より、 $y = \frac{x^2}{\pi}$ を $x + y = \frac{\pi}{2}$ に代入すると

$$x + y = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{x^2}{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2\pi x - \pi^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi \pm \sqrt{3}\pi}{2}$$

が得られ、このうち $0 < x < \frac{\pi}{2}$ を満たすのは

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\pi + \sqrt{3}\pi}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\pi \end{aligned}$$

である。また、 $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\pi$ を $x + y = \frac{\pi}{2}$ に代入することで

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}\pi + y = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore y = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\pi$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\pi, y = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\pi$$

(2)

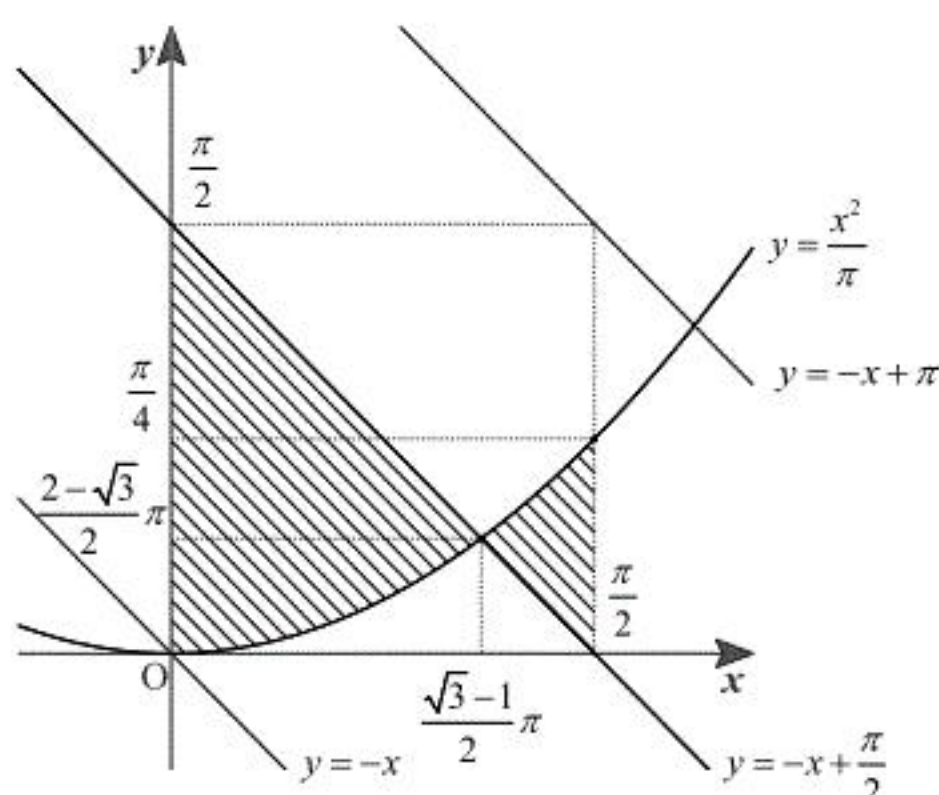
$0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}$ のもとで、条件 $(\pi y - x^2)\cos(x + y) > 0$ は

$$(\pi y - x^2)\cos(x + y) > 0$$

$$\Leftrightarrow \{ \pi y - x^2 > 0 \text{ かつ } \cos(x + y) > 0 \} \text{ または } \{ \pi y - x^2 < 0 \text{ かつ } \cos(x + y) < 0 \}$$

$$\Leftrightarrow \{ y > \frac{x^2}{\pi} \text{ かつ } 0 < x + y < \frac{\pi}{2} \} \text{ または } \{ y < \frac{x^2}{\pi} \text{ かつ } \frac{\pi}{2} < x + y < \pi \}$$

と変形できるから、 $0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}$ の範囲における $(\pi y - x^2)\cos(x + y) > 0$ の表す領域は以下の斜線部分のようになる。ただし、境界線はすべて含まない。



(答) 上図の斜線部分 (ただし、境界線を含まない)