

【I】

(1)

$$P(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1 \text{ より,}$$

$$P'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$$

である。このとき、

$$P(x) = P'(x) \left(\frac{x}{3} + \frac{a}{9} \right) + \left(2 - \frac{2}{9}a^2 \right)x + 1 - \frac{a}{3}$$

が成り立つため、求める商は $\frac{x}{3} + \frac{a}{9}$ 、余りは $\left(2 - \frac{2}{9}a^2 \right)x + 1 - \frac{a}{3}$ である。

$$(\text{答}) \text{ 商: } \frac{x}{3} + \frac{a}{9}, \text{ 余り: } \left(2 - \frac{2}{9}a^2 \right)x + 1 - \frac{a}{3}$$

(2)

方程式 $P(x) = 0$ が 3 重解をもつとき、この解を $x = k$ とおくと、

$$(x - k)^3 = x^3 + ax^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3kx^2 + 3k^2x - k^3 = x^3 + ax^2 + 3x + 1$$

が x についての恒等式となるため、係数を比較して

$$\begin{cases} -3k = a \\ 3k^2 = 3 \\ -k^3 = 1 \end{cases}$$

となる。これを解くと $a = 3, k = -1$ となる。

$$(\text{答}) \ a = 3$$

(3)

方程式 $P(x) = 0$ が 3 重解をもたないが 2 重解をもつとき、2 重解を $x = l$ 、残りの解を $x = m$ ($m \neq l$) とおくと、

$$(x - l)^2(x - m) = x^3 + ax^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2lx + l^2)(x - m) = x^3 + ax^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (2l + m)x^2 + l(l + 2m)x - l^2m = x^3 + ax^2 + 3x + 1$$

が x についての恒等式となるため、係数を比較して

$$\begin{cases} -(2l + m) = a & \dots \textcircled{1} \\ l(l + 2m) = 3 & \dots \textcircled{2} \\ -l^2m = 1 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。③より $l \neq 0$ であり、

$$m = -\frac{1}{l^2} \dots \textcircled{4}$$

である。これを②に代入して整理すると、

$$l \left(l - \frac{2}{l^2} \right) = 3$$

$$\Leftrightarrow l^3 - 3l - 2 = 0 \ (\because l \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (l + 1)^2(l - 2) = 0$$

$$\therefore l = -1, 2$$

となる。 $l = -1$ のとき、④より $m = -1$ となるが、これは $m \neq l$ を満たさないため不適である。

$l = 2$ のとき、④より $m = -\frac{1}{4}$ となるため、 $m \neq l$ を満たす。したがって、①より、求める値は、

$$\begin{aligned} a &= -2 \cdot 2 - \left(-\frac{1}{4} \right) \\ &= -\frac{15}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \ a = -\frac{15}{4}$$

【II】

〔解答〕

(1)	①	②	③
	$2\sqrt{2}$	4	$2\sqrt{3}$
(2)	④		
	$a+b-1$		
(3)	⑤	⑥	⑦
	$a-2b-c+2$	$-2a+b-c+2$	$-1, \frac{5}{3}$

〔解説〕

(1)

$A(1, 1, 1)$, $B(1, -1, -1)$, $C(-1, 1, -1)$ より,

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

であるため,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= |\overrightarrow{AC}| \\ &= \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。また、 $\triangle ABC$ の面積は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{8 \cdot 8 - 16} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(2)

点 $P(a, b, c)$ が平面 α 上にあるとき、実数 p, q を用いて

$$\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$$

と表される。よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2q \\ 1-2p \\ 1-2p-2q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるため,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-2q \\ 1-2p \\ 1-2p-2q \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-2q \\ b=1-2p \\ c=1-2p-2q \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} q=\frac{1-a}{2} \\ p=\frac{1-b}{2} \\ c=1-2 \cdot \frac{1-b}{2} - 2 \cdot \frac{1-a}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p=\frac{1-b}{2} \\ q=\frac{1-a}{2} \\ c=a+b-1 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $c=a+b-1$ と表される。

(3)

(3)において点 $P(a, b, c)$ は平面 α 上にないため、(2)より、 $c \neq a+b-1$ が成り立つ。また、(2)より、平面 α 上にある点 H の座標は、実数 d, e を用いて $H(d, e, d+e-1)$ と表すことができるた

め、 $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} d-1 \\ e-1 \\ d+e-2 \end{pmatrix}$ となる。ここで、 $\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d-1 \\ e-1 \\ d+e-2 \end{pmatrix} &= s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{cases} d=1-2t \\ e=1-2s \end{cases} \end{aligned}$$

となるため、 $H(1-2t, 1-2s, 1-2s-2t)$ と表せる。よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2t-a \\ 1-2s-b \\ 1-2s-2t-c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるため,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} &= (1-2t-a) \cdot 0 + (1-2s-b) \cdot (-2) + (1-2s-2t-c) \cdot (-2) \\ &= -2(2-2t-4s-b-c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AC} &= (1-2t-a) \cdot (-2) + (1-2s-b) \cdot 0 + (1-2s-2t-c) \cdot (-2) \\ &= -2(2-4t-2s-a-c) \end{aligned}$$

となる。また、直線 PH と直線 AB が垂直であり、かつ、直線 PH と直線 AC が垂直であるた

め,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -2(2-2t-4s-b-c) = 0 \\ -2(2-4t-2s-a-c) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4s+2t=2-b-c \\ 2s+4t=2-a-c \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 6s=2+a-2b-c \\ 6t=2-2a+b-c \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} s=\frac{1}{6}(a-2b-c+2) \\ t=\frac{1}{6}(-2a+b-c+2) \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 H が $\triangle ABC$ の重心に一致するとき、

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

が成立する。よって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1-2t \\ 1-2s \\ 1-2s-2t \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2t = \frac{1}{3} \\ 1-2s = \frac{1}{3} \\ 1-2s-2t = -\frac{1}{3} \end{cases} \\ \therefore s=t &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となるため、 $\textcircled{1}$ より,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(a-2b-c+2) \\ \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(-2a+b-c+2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b=c \\ -2a+b=c \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -3a=3c \\ -3b=3c \end{cases} \\ \therefore a=b=-c \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。ここで、中心が点 A で半径 $2\sqrt{2}$ の球面上に点 P があるとき、 $AP=2\sqrt{2}$ であるため、

$$\begin{aligned} AP^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow (-c-1)^2 + (-c-1)^2 + (c-1)^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow 3c^2 + 2c - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(c-1) \left(c + \frac{5}{3} \right) &= 0 \\ \therefore c &= 1, -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\textcircled{2}$ より $P(a, b, c)$ は,

$$P(-1, -1, 1) \quad \text{または} \quad P\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

となり、このとき、 $c \neq a+b-1$ が成り立つ。以上より、 $a=-1, \frac{5}{3}$ となる。

【Ⅲ】

(1)

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{3n-1}$ について、 $r=1$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} r^{3n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 1^{3k-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \\ &= \infty\end{aligned}$$

となるため、 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{3n-1}$ は発散する。 $r \neq 1$ のとき、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} r^{3n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n r^{3k-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} r^2 \sum_{k=1}^n r^{3(k-1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2 (1-r^{3n})}{1-r^3}\end{aligned}$$

となるため、この極限が収束するための実数 r の条件は

$$\begin{aligned}|r^3| &< 1 \\ \Leftrightarrow -1 &< r < 1\end{aligned}$$

である。よって、求める値の範囲は $-1 < r < 1$ であり、このとき、無限級数の値は、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} r^{3n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2 (1-r^{3n})}{1-r^3} \\ &= \frac{r^2 \cdot (1-0)}{1-r^3} \\ &= \frac{r^2}{1-r^3}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答) 実数 } r \text{ の範囲: } -1 < r < 1, \text{ 和: } \sum_{n=1}^{\infty} r^{3n-1} = \frac{r^2}{1-r^3}$$

(2)

$$\begin{aligned}S_m &= \sum_{n=1}^{3m} \left(\sin \frac{2n}{3} \pi \right) r^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^m \left\{ \sin \frac{2(3n-2)}{3} \pi \right\} r^{(3n-2)-1} + \sum_{n=1}^m \left\{ \sin \frac{2(3n-1)}{3} \pi \right\} r^{(3n-1)-1} + \sum_{n=1}^m \left(\sin \frac{2 \cdot 3n}{3} \pi \right) r^{3n-1} \\ &= \sum_{n=1}^m \left\{ \sin \left(2n\pi - \frac{4}{3} \pi \right) \right\} r^{3n-1(n-1)} + r \sum_{n=1}^m \left\{ \sin \left(2n\pi - \frac{2}{3} \pi \right) \right\} r^{3(n-1)} + r^2 \sum_{n=1}^m \sin 2n\pi \cdot r^{3(n-1)} \\ &= \sin \left(-\frac{4}{3} \pi \right) \cdot \sum_{n=1}^m r^{3(n-1)} + \sin \left(-\frac{2}{3} \pi \right) \cdot r \sum_{n=1}^m r^{3(n-1)} + 0 \cdot r^2 \sum_{n=1}^m r^{3(n-1)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (1-r) \sum_{n=1}^m r^{3(n-1)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (1-r) \cdot \frac{1-r^{3m}}{1-r^3} \\ &= \frac{\sqrt{3}(1-r^{3m})}{2(1+r+r^2)}\end{aligned}$$

である。(1)より、 $-1 < r < 1$ であるため、求める極限は、

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} S_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}(1-r^{3m})}{2(1+r+r^2)} \\ &= \frac{\sqrt{3} \cdot (1-0)}{2(1+r+r^2)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2(1+r+r^2)}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答) } \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \frac{\sqrt{3}}{2(1+r+r^2)}$$

(3)

(2)より、

$$f(r) = \frac{\sqrt{3}}{2(1+r+r^2)}$$

である。よって、 $-1 < x < 1$ において、求める定積分は、

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^x (1+2r) f(r) dr \\ &= \int_0^x (1+2r) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2(1+r+r^2)} dr \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^x \frac{(1+r+r^2)'}{1+r+r^2} dr \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\log(1+r+r^2) \right]_0^x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \log(1+x+x^2)\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答) } F(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \log(1+x+x^2)$$

(4)

(3)より、

$$F(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^x \frac{1+2r}{1+r+r^2} dr$$

である。よって、

$$F'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1+2x}{1+x+x^2}$$

となるため、 $-1 < x < 1$ において、

$$\begin{aligned}F'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。したがって、 $-1 < x < 1$ における $F(x)$ の増減表は下のようになる。

x	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

上表より、 $-1 < x < 1$ において、 $F(x)$ は $x = -\frac{1}{2}$ のとき、極小値

$$\begin{aligned}F\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \log\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{3}{4}\end{aligned}$$

をとる。

$$\text{(答) 極小値: } \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{3}{4}$$

【IV】

【解答】

(1)	①	②
	$\pi-\frac{3}{2\pi}$	$-\frac{3}{4\pi^2}$
(2)	③	
	$\frac{\sqrt{3}+5i}{4}, \frac{3\sqrt{3}+i}{4}$	
(3)	④	⑤
	$1-\frac{1}{3^n}$	$\sqrt{3}$
(4)	⑥	
	$\frac{13}{36}$	
(5)	⑦	
	34	

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{2\pi} (\sin x - ax)^2 dx \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 x - 2ax \sin x + a^2 x^2) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx - 2a \int_0^{2\pi} x \sin x dx + a^2 \int_0^{2\pi} x^2 dx \end{aligned}$$

である。ここで、半角の公式より、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

であり、部分積分より、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x \sin x dx &= \left[x \cdot (-\cos x) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1 \cdot (-\cos x) dx \\ &= -2\pi + \int_0^{2\pi} \cos x dx \\ &= -2\pi + [\sin x]_0^{2\pi} \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x^2 dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{8}{3} \pi^3 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx - 2a \int_0^{2\pi} x \sin x dx + a^2 \int_0^{2\pi} x^2 dx \\ &= \pi - 2a \cdot (-2\pi) + a^2 \cdot \frac{8}{3} \pi^3 \\ &= \frac{8}{3} \pi^3 a^2 + 4\pi a + \pi \\ &= \frac{8}{3} \pi^3 \left(a + \frac{3}{4\pi^2} \right)^2 + \pi - \frac{3}{2\pi} \end{aligned}$$

となるため、 $I(a)$ は $a = -\frac{3}{4\pi^2}$ のとき、最小値 $\pi - \frac{3}{2\pi}$ をとる。

(2)

点 B を表す複素数を β とすると、 $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$ 、 $OA = 2OB$ より、

$$\begin{aligned} \beta &= \left\{ \cos \left(\pm \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pm \frac{\pi}{6} \right) \right\} \cdot \frac{1}{2} (2 + \sqrt{3}i) \quad (\text{複号同順}) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i \right) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= \frac{1}{4} (\sqrt{3} \pm i) (2 + \sqrt{3}i) \\ &= \frac{\sqrt{3}+5i}{4}, \frac{3\sqrt{3}+i}{4} \end{aligned}$$

となる。

(3)

数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt[3]{3a_n} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= (3a_n)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

で表せる。問題文より両辺正であるため、両辺3を底とする対数を取ると、

$$\begin{aligned} \log_3 a_{n+1} &= \log_3 (3a_n)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \log_3 3a_n \\ &= \frac{1}{3} \log_3 a_n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。ここで、 $b_n = \log_3 a_n$ とおくと、 $b_1 = \log_3 a_1 = \frac{1}{3}$ であり、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{3} b_n + \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{3} \left(b_n - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

が成り立つため、数列 $\{b_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \left(b_1 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3^{n-1}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $b_n = \log_3 a_n \Leftrightarrow a_n = 3^{b_n}$ より、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{b_n} \\ &= 3^{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)} \end{aligned}$$

である。また、求める極限は、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)} \\ &= 3^{\frac{1}{2} (1-0)} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

(4)

$a^2, b^2, 27$ を3辺の長さとする三角形について、三角形の成立条件は、

$$\begin{cases} a^2 + b^2 > 27 & \cdots \textcircled{1} \\ b^2 + 27 > a^2 & \cdots \textcircled{2} \\ a^2 + 27 > b^2 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

である。以下、 a, b の大小関係によって場合分けを行う。

[1] $a = b$ のとき

②、③式は常に成立し、①式は

$$2a^2 > 27 \Leftrightarrow a^2 > \frac{27}{2}$$

となる。これを満たす a の値は $a = 4, 5, 6$ である。したがって、題意を満たす a, b の組は3通りである。

[2] $a > b$ のとき

$2a^2 > a^2 + b^2$ となるため、①式より、

$$2a^2 > 27 \Leftrightarrow a^2 > \frac{27}{2}$$

となる。よって、 $a = 4, 5, 6$ が必要となる。以下、 a の値によって場合分けを行う。

[i] $a = 4$ のとき

$b = 1, 2, 3$ であるが、これらはいずれも①を満たさないため、不適である。

[ii] $a = 5$ のとき

$b = 1, 2, 3, 4$ であり、このうち①を満たすのは $b = 2, 3, 4$ である。これらは②、③も満たす。

[iii] $a = 6$ のとき

$b = 1, 2, 3, 4, 5$ であり、これらはすべて①、③を満たす。そのうち、②も満たすのは $b = 4, 5$ である。

以上、[i], [ii], [iii] より、題意を満たす a, b の組は5通りである。

[3] $a < b$ のとき

[2]と同様に考えて、題意を満たす a, b の組は5通りである。

以上、[1], [2], [3]より、題意を満たす a, b の組は、

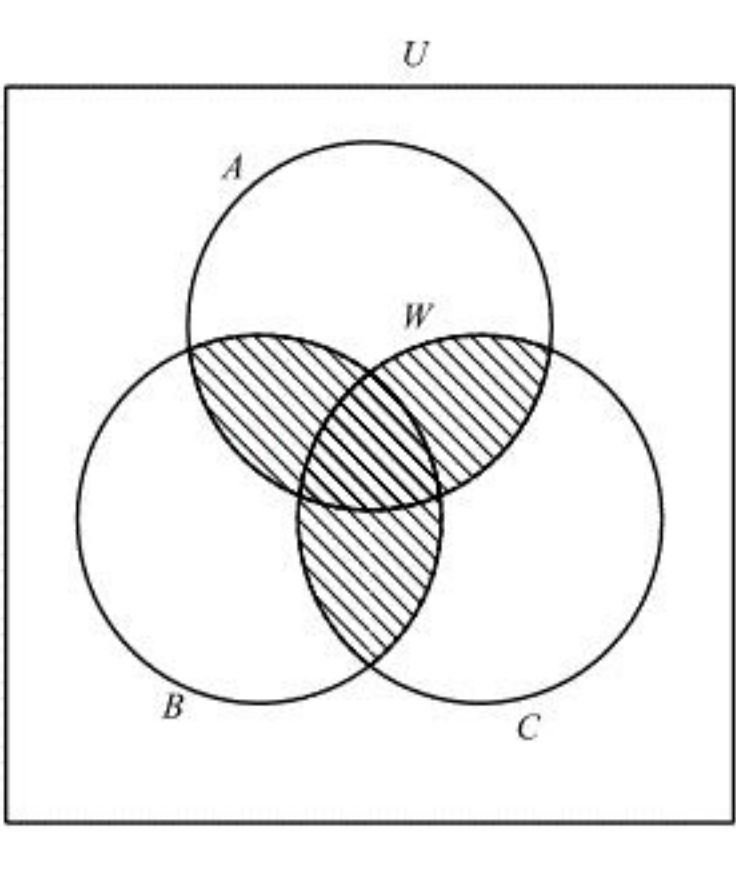
$$3+5+5=13(\text{通り})$$

である。また、サイコロを2回投げたときの目の出方が 6^2 通りであるため、求める確率は

$$\frac{13}{36} \text{ である。}$$

(5)

A, B, C の少なくとも2つに属している U の部分集合を W とする。このとき、集合 U の部分集合 A, B, C, W のベン図は下図ようになる。ただし、集合 W は斜線部分である。



上図より、

$$n(W) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cup B \cup C) - n(A \cap B \cap C)$$

が成り立つため、

$$n(A \cup B \cup C) = 121, n(A) = 67, n(B) = 41, n(C) = 51, n(A \cap B \cap C) = 4$$

より、

$$\begin{aligned} n(W) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cup B \cup C) - n(A \cap B \cap C) \\ &= 67 + 41 + 51 - 121 - 4 \\ &= 34 \end{aligned}$$

となる。したがって、求める要素の個数は34個である。