

2022 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ と直線 $y = 2x + k$ に対して、楕円と直線が共有点をもたないとき、次の問いに答えよ。ただし、 k は正の定数とする。

- (1) k のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 楕円上の点 $P(2\cos\theta, 3\sin\theta)$ から直線に下ろした垂線を PH とする。そのとき、 H の座標を k と θ を用いて表せ。
- (3) 点 P が楕円上を動くとき、(2) で求めた PH の長さの最小値を k で表せ。

〔Ⅱ〕 次の を数値でうめよ。

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_n = \int_1^3 x e^{nx^2} dx, \quad b_n = \int_1^3 e^{nx^2} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき、

$$a_n = \frac{1}{\textcircled{1}} n \left(e^{\textcircled{2}} - e^n \right)$$

となる。よって

$$\log na_n = \textcircled{3} n + \log \left(1 - e^{\textcircled{4}} \right) - \log 2$$

である。 $1 \leq x \leq 3$ に対して

$$e^{nx^2} \leq x e^{nx^2} \leq 3 e^{nx^2}$$

なので、 $\textcircled{5} a_n \leq b_n \leq a_n$ となり、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log na_n = \textcircled{6}$$

となる。

〔Ⅲ〕 三角形 OAB において,

$$OA = 4, OB = 5, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{5}{2}$$

とし, 辺 AB を 1 : 5 に内分する点を P とし, 4 : 5 に内分する点を Q とする。

- (1) AB と OP の長さを求めよ。
- (2) 三角形 OPQ の面積を求めよ。
- (3) $\sin \angle POQ$ の値を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

- (1) p, q を 1 より大きい実数とする。 x, y, z を $xyz \neq 0$ かつ $p^x = q^y = (pq)^z$

を満たす実数とすると、 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ を z を用いて表すと ① になる。

- (2) $\alpha = \frac{\pi}{15}, \beta = \frac{\pi}{10}, \gamma = \frac{\pi}{5}$ のとき、

$$\frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)^3}{\cos \gamma + i \sin \gamma}$$

の値は ② である。ただし、 i は虚数単位である。

- (3) サイコロを 3 回投げ 1 回目、2 回目、3 回目に出た目をそれぞれ a, b, c とする。そのとき、 $2^a 3^b 6^c$ の正の約数の個数が 24 となる確率は ③ である。

- (4) $x > 0$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

で定める。 $f(x)$ の最大値は ④ である。

- (5) 関数 $f(x) = x^2$ に対して

$$S = \int_0^1 f(x) dx, \quad S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおくと、

$$S_n = \frac{1}{3} + \text{ ⑤} \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^2}$$

であり、 $S_n - S$ が $\frac{1}{100}$ 以下となる最小の n は ⑥ である。

(以上)

