2022年度入学試験問題

数　　学

注　意　事　項

1．試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。

2．解答はすべて黒鉛筆（ＨＢ）〈シャープペンシルは，ＨＢ 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。

3．解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し，切取線から切り離してください。

4．試験時間は 90 分です。

5．問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。

6．解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 空間に3点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$をとる。ただし，$a>0$，$b>0$，$c>0$とする。線分ACを$t:1-t$に内分する点をPとし，線分BCを$1-t:t$に内分する点をQとする$(0 \leqq t \leqq 1)$。

(1) PとQの座標をそれぞれ求めよ。また，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$と$\vec{n}=\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{c}\right)$との内積は$t$の値によらず一定であることを示せ。

(2) 線分PQの長さを直径とする円の面積$S(t)$を求めよ。また，$S(t)$が最小となるtの値を求めよ。

(3) (2)の$S(t)$について，積分$\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt$を求めよ。

〔Ⅱ〕 $f(x) = x(3-x)$ とおく。曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を S とする。x 軸上の線分 $\{x \mid 0 \leqq x \leqq 3\}$ を線分 $I_k = \left\{x \,\middle|\, \frac{k-1}{n} \leqq x \leqq \frac{k}{n}\right\}$ によって $3n$ 等分する $(k = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 3n)$。$I_k$ の長さと $f\left(\frac{k}{n}\right)$ を縦と横の長さとする長方形の面積の総和を S_n とする。ただし，n は自然数である。

(1) S_1 を求めよ。

(2) $S - S_n$ を求めよ。

(3) $S - S_n < \frac{S}{10^4}$ となるような最小の自然数 n を求めよ。

〔Ⅲ〕 1から9までの自然数が1枚に1つずつ書かれた9枚のカードがある。それらをよくまぜてから1枚のカードを取り出し，取り出したカードに書かれた数を a とする。取り出したカードを元に戻し，同様に9枚のカードから1枚を取り出し，取り出したカードに書かれた数を b とする。円

$$C : x^2 - 2ax + y^2 - ay + \frac{5}{4}a^2 - b = 0$$

を考えるとき，次の $\boxed{}$ をうめよ。ただし，$\boxed{①}$，$\boxed{③}$，$\boxed{⑤}$ は a，b を用いた式でうめよ。

(1) 円 C の中心と原点との距離が10以下となる条件は $\boxed{①}$ であり，その確率は $\boxed{②}$ である。

(2) 原点が円 C の内部(円周上は含まない)にある条件は $\boxed{③}$ であり，その確率は $\boxed{④}$ である。

(3) 円 C と直線 $y = x$ が異なる2つの共有点をもつための条件は $\boxed{⑤}$ であり，その確率は $\boxed{⑥}$ である。

〔Ⅳ〕 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 2$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2{a_n}^{-\frac{3}{2}}$ ($n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$) を満たしている。$b_n = \log_2 a_n$ とおくとき，次の $\boxed{}$ をうめよ。

正の実数 x に対して $\log_2\left(2x^{-\frac{3}{2}}\right) = \boxed{①} + \boxed{②}\log_2 x$ が成り立つので，与えられた $\{a_n\}$ の漸化式から $b_{n+1} + \boxed{③}\, b_n + \boxed{④} = 0$ が得られる。このことから数列 $\left\{b_n - \dfrac{2}{3}\right\}$ は公比 $\boxed{⑤}$ の等比数列であることがわかり，$b_n = \boxed{⑥}$ となる。よって，$|b_n - b_{n-1}| < \dfrac{1}{1024}$ となる最小の n は $\boxed{⑦}$ である。

(以上)