

(文)

数E問

2022 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 60 分です。
5. 問題は 3 ページで大問 3 問です。余白は計算用紙です。

〔Ⅰ〕 $-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}$ とする。△OABにおいて、辺AB上の点Pを

$$AB : BP = 2 : (1 + 2p)$$

となるようにとる。このとき、Pを通り直線OBに平行な直線と辺OAの交点をCとする。また、直線CP上の点Dを、Pが線分CDの中点となるようにとる。

さらに、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。次の をうめよ。

$\overrightarrow{OP}$ および $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ および p を用いて表すと、それぞれ

$$\overrightarrow{OP} = \left(\text{①} \right) \vec{a} + \left(\text{②} \right) \vec{b},$$

$$\overrightarrow{OD} = \left(\text{①} \right) \vec{a} + \left(\text{③} \right) \vec{b}$$

である。さらに、 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ とする。このとき、 $|\overrightarrow{OD}|^2$ を p の式で表すと、 $|\overrightarrow{OD}|^2 = \text{④}$ である。よって、 $|\overrightarrow{OD}|$ は $p = \text{⑤}$ のとき、最小値 ⑥ をとる。

〔Ⅱ〕 次の をうめよ。ただし、 ④ , ⑤ は k の多項式でうめよ。

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = -a_n + \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_n - \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定めると、 $b_1 = \text{①}$ であり、 b_{n+1} は b_n を用いて、 $b_{n+1} = \text{②}$

と表される。よって、 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \text{③}$ となる。

さらに、 $k = 1, 2, 3, \dots$ とすると、 a_{2k-1} は k を用いて、 $a_{2k-1} = \frac{\text{④}}{2k}$

と表される。また、 a_{2k} は k を用いて、 $a_{2k} = \frac{\text{⑤}}{2k+1}$ と表される。したがって、

$\{a_n\}$ の初項から第 $2k$ 項までの積は k を用いて、 $a_1 a_2 \cdots a_{2k} = \text{⑥}$ と表される。

〔Ⅲ〕 次の問いに答えよ。

(1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$ の範囲で, $x^2 = \pi y$ かつ $\cos(x + y) = 0$ となる x, y を求めよ。

(2) $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$ の範囲で, 不等式

$$(\pi y - x^2) \cos(x + y) > 0$$

の表す領域を解答欄の座標平面に図示せよ。

(以上)