

〔 I 〕

〔 解答 〕

①	②	③	④	⑤
$0 < m < 2$	$\frac{t^2 - mt + 1}{\sqrt{m^2 + 1}}$	$\frac{m}{2}$	$\frac{4 - m^2}{4\sqrt{m^2 + 1}}$	m

〔 解説 〕

ℓ と C の共有点の x 座標は、 x についての方程式

$$\begin{aligned} mx - 1 &= x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - mx + 1 &= 0 \end{aligned}$$

の実数解であるから、 ℓ と C が共有点をもたないのは、 この方程式が実数解をもたないときである。よって、この方程式の判別式を D とすると、 ℓ と C が共有点をもたないような m の値の範囲は

$$\begin{aligned} D &< 0 \\ \Leftrightarrow (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow m^2 &< 4 \\ \therefore 0 < m < 2 \quad (\because m > 0) \end{aligned}$$

と求められる。また、点 $P(t, t^2)$ と $\ell: mx - y - 1 = 0$ の距離 d は、点と直線の距離の公式より、

$$\begin{aligned} d &= \frac{|m \cdot t - t^2 - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|t^2 - mt + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} \end{aligned}$$

と表される。 $0 < m < 2$ のとき、 $D < 0$ より任意の t において、 $t^2 - mt + 1 > 0$ となるので、

$$\begin{aligned} d &= \frac{t^2 - mt + 1}{\sqrt{m^2 + 1}} \\ &= \frac{\left(t - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{4 - m^2}{4}}{\sqrt{m^2 + 1}} \end{aligned}$$

となる。よって、 $t = \frac{m}{2}$ のとき、 d は最小値

$$\frac{\frac{4 - m^2}{4}}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{4 - m^2}{4\sqrt{m^2 + 1}}$$

をとる。また、 C の方程式 $y = x^2$ を x で微分すると

$$y' = 2x$$

となるから、 x 座標が $\frac{m}{2}$ となる点における C の接線の傾きは

$$2 \cdot \frac{m}{2} = m$$

となる。

【Ⅱ】

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
x^2-y^2+px+q	$y(2x-p)$	3	-1	$1\pm 2i$	$\frac{56}{3}$

〔解説〕

z の実部を x ，虚部を y とすると， $z=x+yi$ である。このとき，(＊)の左辺は

$$\begin{aligned} z^2+p\bar{z}+q &= (x+yi)^2+p(x-yi)+q \\ &= (x^2-y^2+px+q)+y(2x-p)i \end{aligned}$$

となる。したがって， p, q, x, y を用いて，(＊)の左辺の実部と虚部を表すと，それぞれ $x^2-y^2+px+q, y(2x-p)$ となる。よって， $p=2, q=1$ のとき，(＊)の左辺の実部と虚部はそれぞれ $x^2-y^2+2x+1, 2y(x-1)$ となる。ここで，(＊)の右辺は実部，虚部ともに0であるから，(＊)が成立する条件は

$$\begin{cases} x^2-y^2+2x+1=0 & \cdots (\mathcal{A}) \\ 2y(x-1)=0 & \cdots (\mathcal{I}) \end{cases}$$

である。ここで，

$$(\mathcal{I}) \Leftrightarrow \text{「} y=0 \text{ または } x=1 \text{」}$$

であるから，この2つの場合について考える。

[1] $y=0$ のとき

(\mathcal{A})

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1$$

となる。

[2] $x=1$ のとき

(\mathcal{A})

$$\Leftrightarrow -y^2+4=0$$

$$\Leftrightarrow y=\pm 2$$

となる。

以上,[1],[2]より，

$$(x,y)=(-1,0), (1,2), (1,-2)$$

となるから，(＊)は $z=-1, 1\pm 2i$ の異なる3個の解をもち，このうち実数解は $z=-1$ ，虚数解は $z=1\pm 2i$ である。次に，一般の実数 p, q に対して，(＊)が成立する条件は

$$\begin{cases} x^2-y^2+px+q=0 & \cdots (\mathcal{U}) \\ y(2x-p)=0 & \cdots (\mathcal{E}) \end{cases}$$

である。ここで，

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \text{「} y=0 \text{ または } x=\frac{p}{2} \text{」}$$

であるから， $2< p < 4$ のもとで，この2つの場合について考える。

[1] $y=0$ のとき

$$(\mathcal{U}) \Leftrightarrow x^2+px+q=0$$

となる。よって， $y=0$ のもとで，(\mathcal{U})は x について高々2個の異なる実数解をもち，異なる2個の実数解が存在する条件は，判別式から，

$$p^2-4q>0$$

$$\therefore q<\frac{p^2}{4} \qquad \cdots (\mathcal{O})$$

である。

[2] $x=\frac{p}{2}$ のとき

$$(\mathcal{U}) \Leftrightarrow y^2=\frac{3}{4}p^2+q$$

となる。よって， $x=1$ のもとで，(\mathcal{U})は y について高々2個の異なる実数解をもち，異なる2個の実数解が存在する条件は

$$\frac{3}{4}p^2+q>0$$

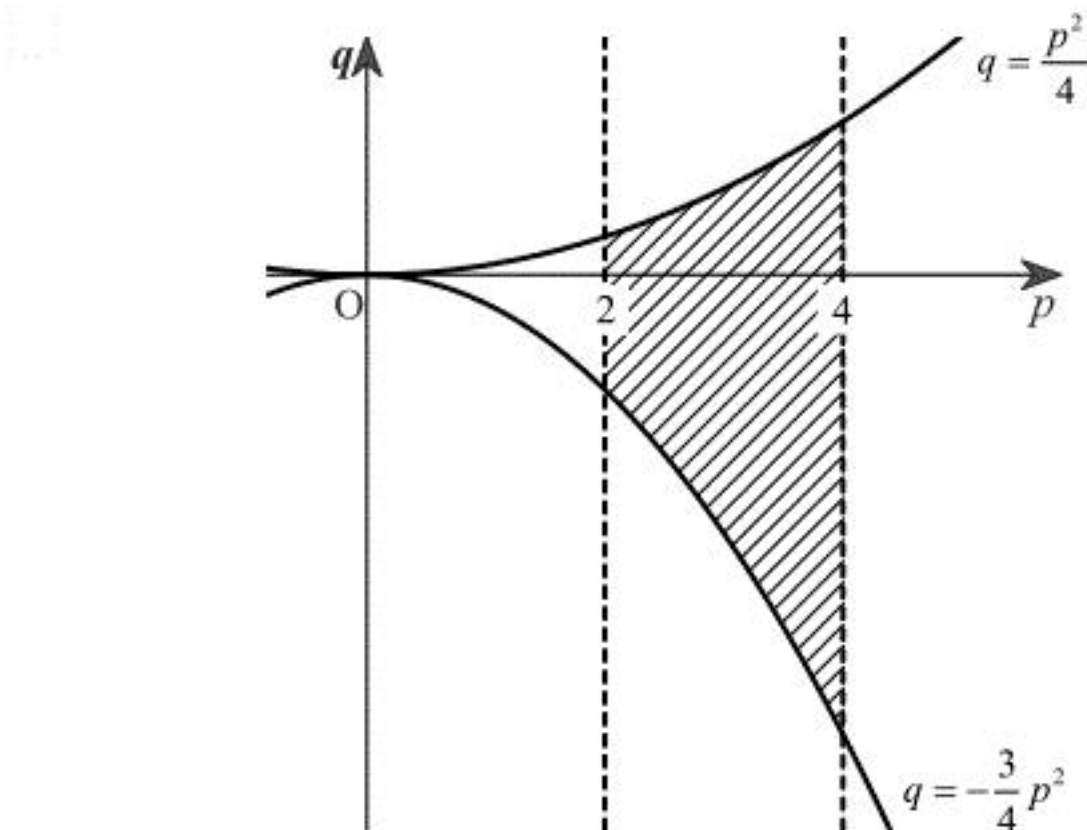
$$\therefore q>-\frac{3}{4}p^2 \qquad \cdots (\mathcal{K})$$

である。なお，このとき $y^2>0$ より $y\neq 0$ であるため， (x,y) の解が[1]と重複することはあり得ない。

以上,[1],[2]より，(＊)が異なる4個の解をもつ p, q の条件は，(\mathcal{O}), (\mathcal{K})をとともに満たすこと，すなわち

$$-\frac{3}{4}p^2< q < \frac{p^2}{4}$$

である。したがって， D は下図の斜線部である(境界は含まない)。

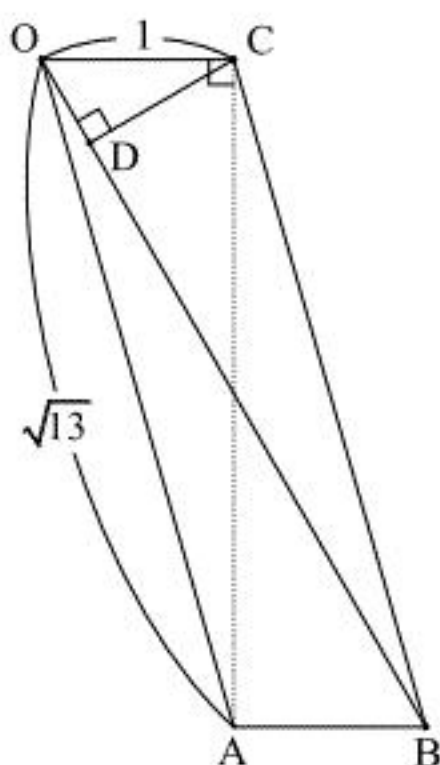


よって， D とその境界が定める図形の面積は

$$\int_2^4 \left\{ \frac{p^2}{4} - \left(-\frac{3}{4}p^2 \right) \right\} dp = \int_2^4 p^2 dp = \left[\frac{1}{3}p^3 \right]_2^4 = \frac{56}{3}$$

である。

〔Ⅲ〕



(1)

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \angle AOC$$

であり, また $\angle OCA = 90^\circ$ より

$$\cos \angle AOC = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

となるから,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} &= \sqrt{13} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$

(2)

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \vec{c}$$

である。また k を実数として

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= k \overrightarrow{OB} \\ &= k(\vec{a} + \vec{c}) \end{aligned}$$

と表されるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CD} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{c}) \cdot \{k(\vec{a} + \vec{c}) - \vec{c}\} &= 0 \\ \Leftrightarrow k(|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2) - \vec{a} \cdot \vec{c} - |\vec{c}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow k(13 + 2 \cdot 1 + 1) - 1 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

と得られる。以上より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} &= \frac{1}{8}(\vec{a} + \vec{c}) - \vec{c} \\ &= \frac{1}{8}\vec{a} - \frac{7}{8}\vec{c} \end{aligned}$$

である。

(答) $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{8}\vec{a} - \frac{7}{8}\vec{c}$

(3)

$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{8}\vec{a} - \frac{7}{8}\vec{c}$ であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CD}|^2 &= \frac{1}{64}(|\vec{a}|^2 - 14\vec{a} \cdot \vec{c} + 49|\vec{c}|^2) \\ &= \frac{1}{64}(13 - 14 \cdot 1 + 49 \cdot 1) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{CD}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

と求まる。

(答) $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$