

〔I〕

(1)

$$\begin{aligned}\left\{\frac{f(x)}{e^x}\right\}' &= \frac{e^x f'(x) - e \cdot e^x f(x)}{e^{2x}} \\ &= \frac{f'(x) - ef(x)}{e^x}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $f'(x) = ef(x) + \frac{e^x}{x}$  であるから

$$\begin{aligned}\left\{\frac{f(x)}{e^x}\right\}' &= \frac{ef(x) + \frac{e^x}{x} - ef(x)}{e^x} \\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{1}{x}$

(2)

(1)より  $\left\{\frac{f(x)}{e^x}\right\}' = \frac{1}{x}$  であるから、この式の両辺を  $x$  で積分して

$$\frac{f(x)}{e^x} = \log x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となる。また、問題文の条件より  $f(1) = 0$  であるから  $\frac{f(1)}{e^1} = 0$  である。よって

$$\begin{aligned}0 &= \log 1 + C \\ \therefore C &= 0\end{aligned}$$

となる。したがって  $\frac{f(x)}{e^x} = \log x$  であるから、 $f(x) = e^x \log x$  となる。

(答)  $f(x) = e^x \log x$

(3)

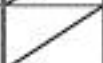
(2)の結果から、

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{e^x} &= \frac{ef(x) + \frac{e^x}{x}}{e^x} \\ &= e \log x + \frac{1}{x}\end{aligned}$$

である。 $g(x) = e \log x + \frac{1}{x}$  とおくと

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{e}{x} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{ex - 1}{x^2}\end{aligned}$$

であるから  $g(x) \left( = \frac{f'(x)}{e^x} \right)$  の増減は以下のようになる。

|         |                                                                                     |            |               |            |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------------|------------|
| $x$     | 0                                                                                   | ...        | $\frac{1}{e}$ | ...        |
| $g'(x)$ |  | -          | 0             | +          |
| $g(x)$  |  | $\searrow$ | 極小            | $\nearrow$ |

ここで、

$$\begin{aligned}g\left(\frac{1}{e}\right) &= e \log \frac{1}{e} + e \\ &= -e + e \\ &= 0\end{aligned}$$

であるから、 $x \neq \frac{1}{e}$  で  $\frac{f'(x)}{e^x} > 0$  となる。よって方程式  $\frac{f'(x)}{e^x} = 0$  の正の解は  $x = \frac{1}{e}$  である。こ

こで、方程式  $f'(x) = 0$  の解と方程式  $\frac{f'(x)}{e^x} = 0$  の解は一致するから、方程式  $f'(x) = 0$  の正の

解は  $x = \frac{1}{e}$  である。

(答) 増減：前述、解： $x = \frac{1}{e}$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

|   |   |   |    |             |       |   |
|---|---|---|----|-------------|-------|---|
| ① | ② | ③ | ④  | ⑤           | ⑥     | ⑦ |
| 4 | 5 | 7 | 21 | $7^{n+1}+3$ | $n+1$ | 3 |

〔解説〕

与えられた条件より、

$$m=7q_1+5$$

であるから、

$$\begin{aligned} m^2 &= (7q_1+5)^2 \\ &= 49q_1^2+70q_1+25 \\ &= 7(7q_1^2+10q_1+3)+4 \end{aligned}$$

が成り立ち、 $a_2=4$ である。また、

$$\begin{aligned} m^{k+1} &= m^k \cdot m \\ &= (7q_k+a_k)(7q_1+5) \\ &= 7(7q_1q_k+5q_k+q_1a_k)+5a_k \\ &\equiv 5a_k \pmod{7} \end{aligned}$$

より、 $a_{k+1}$ は $5a_k$ を7で割ったときの余りに等しい。したがって、 $a_k$ は以下のように推移する。

|       |   |   |   |   |   |   |   |     |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| $k$   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
| $a_k$ | 5 | 4 | 6 | 2 | 3 | 1 | 5 | ... |

上記対応による周期性から、すべての自然数 $k$ について

$$a_k=a_{k+6} \qquad \cdots (*)$$

が成り立つため、 $a_k=a_1$ となる1より大きい自然数 $k$ の中で最小のものを $\ell$ とおくと、

$$\ell=7$$

である。よって、

$$\begin{aligned} S_{\ell-1} &= S_6 \\ &= 5+4+6+2+3+1 \\ &= 21 \end{aligned}$$

であり、周期性より $k'$ を自然数とすると、

$$S_{6k'}=k' \cdot S_6=21k' \qquad \cdots (**)$$

が成立する。ここで、

$$\begin{aligned} 7^n &= (6+1)^n \\ &\equiv 1 \pmod{6} \end{aligned}$$

であるから、自然数 $n'$ を用いて

$$7^n=6n'+1 \qquad \cdots (***)$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned} S_{\ell^n} &= S_{7^n} \\ &= S_{6n'+1} \\ &= S_{6n'}+a_{6n'+1} \end{aligned}$$

と表すことができ、 $(*)$ および $(***)$ から、

$$n'=\frac{7^n-1}{6}, a_{6n'+1}=a_1=5$$

が成り立ち、 $(**)$ より

$$\begin{aligned} S_{\ell^n} &= 21 \cdot \frac{7^n-1}{6} + 5 \\ &= \frac{7^{n+1}+3}{2} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} S_{\ell^n} &= \frac{7^{n+1}+3}{2} \\ &= \frac{7}{2} \cdot 7^n + \frac{3}{2} \\ &= 3 \cdot 7^n + \frac{7^n+3}{2} \end{aligned}$$

であり、

$$\frac{7^n}{7}=7^{n-1}<\frac{7^n}{2}<\frac{7^n+3}{2}<\frac{7^n+7^n}{2}=7^n$$

が成り立つことから、

$$3 \cdot 7^n + 7^{n-1} < S_{\ell^n} < 4 \cdot 7^n$$

が成り立つ。したがって、 $S_{\ell^n}$ を7進法で表すと $(n+1)$ 桁であり、 $(n+1)$ 桁目の数字は3である。

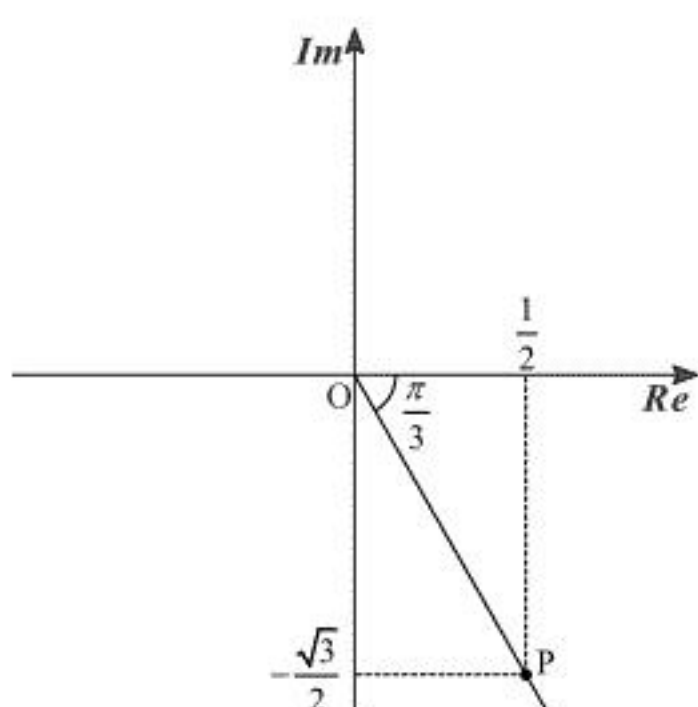
〔Ⅲ〕

(1)

問題文の条件より、

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-\beta}{z_0-\beta}-i &= \frac{\{-(\sqrt{3}-1)+i\}-(-1+2i)}{(-1)-(-1+2i)}-i \\ &= \frac{2-\sqrt{3}-i}{-2i}-i \\ &= \frac{1+(2-\sqrt{3})i}{2}-i \\ &= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

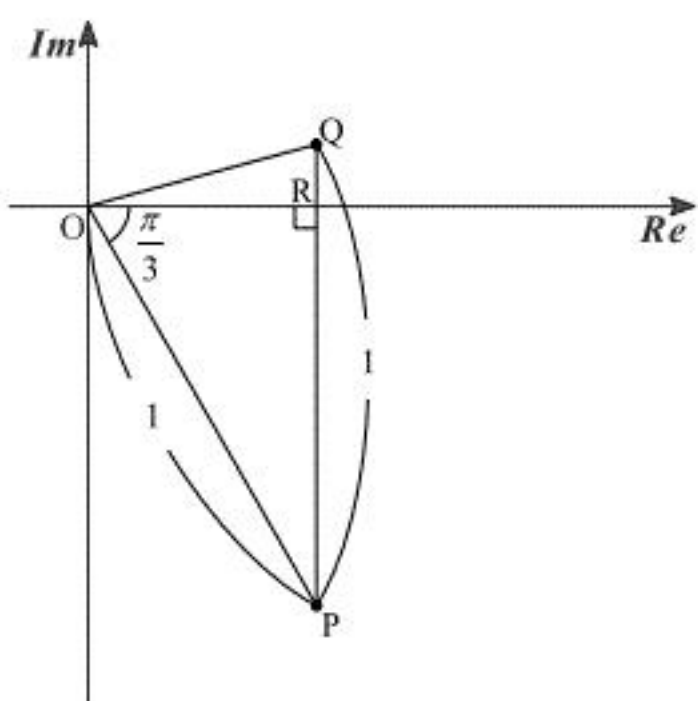
となるから、半直線 OP が実軸の正の部分となす角を複素数平面上に図示すると、以下のようになる。



(答) 前図

(2)

複素数平面上で  $\frac{\alpha-\beta}{z_0-\beta}$  を表す点を Q とおくと、点 Q は点 P を虚軸方向に 1 だけ平行移動させた点であり、その位置関係は下図のようになる。



いま複素数平面上で  $\frac{1}{2}$  を表す点を R とおくと、(1)より  $\angle ROP = \frac{\pi}{3}$  であり、 $\angle ORP = \frac{\pi}{2}$  である

から、 $\angle OPR = \frac{\pi}{6}$  となる。また、 $OP = PQ = 1$  より三角形 OPQ は二等辺三角形であるから、

$$\begin{aligned}\angle QOP &= \frac{1}{2}(\pi - \angle OPR) \\ &= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{5}{12}\pi\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\angle QOR &= \angle QOP - \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

となり、 $\frac{\alpha-\beta}{z_0-\beta}$  の偏角  $\theta$  は  $\frac{\pi}{12}$  と求まる。

(答)  $\theta = \frac{\pi}{12}$

(3)

$\frac{\alpha-\beta}{z_0-\beta}$  の絶対値を  $r(>0)$  とおくと、与式と(2)の結果より、

$$\begin{aligned}z_n &= r^n \left( \cos \frac{n}{12}\pi + i \sin \frac{n}{12}\pi \right) (z_0 - \beta) + \beta \\ \therefore \frac{z_n - \beta}{z_0 - \beta} &= r^n \left( \cos \frac{n}{12}\pi + i \sin \frac{n}{12}\pi \right) (\because z_0 \neq \beta)\end{aligned}$$

が成り立つ。いま  $z_0, \beta$  を表す 2 点を通る直線と  $z_n, \beta$  を表す 2 点を通る直線が垂直に交わる

とき、 $\frac{z_n - \beta}{z_0 - \beta}$  は純虚数となるから、 $n$  が自然数であることを考慮すると、上式より、

$$\begin{aligned}\frac{n}{12}\pi &= \frac{2k-1}{2}\pi \quad (k \text{ は自然数}) \\ \therefore n &= 12k - 6\end{aligned}$$

となる。したがって、条件を満たす自然数  $n$  のうち最小のものは  $k=1$  のとき  $n=6$  である。

(答)  $n=6$

【Ⅳ】

【解答】

| ①                      | ② | ③ | ④                  | ⑤                | ⑥            | ⑦  |
|------------------------|---|---|--------------------|------------------|--------------|----|
| $\frac{19}{3} < b < 7$ | 2 | 4 | $\frac{1}{3}a_n^3$ | $3^{n-1} \log 2$ | $(-1)^{n+1}$ | 15 |

【解説】

(1)  $f(x) = x^2 - bx + 10$  とする。  $f(x) = 0$  が  $2 < x < 3$  の範囲にもつ実数解の個数で場合分けする。

[1] 解をちょうど1つもつとき

[i]  $f(2) \neq 0$  かつ  $f(3) \neq 0$  のとき  
 $b$  の条件は  $f(2) \cdot f(3) < 0$  である。ゆえに

$$\begin{aligned} f(2) \cdot f(3) &< 0 \\ \Leftrightarrow (14 - 2b)(19 - 3b) &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{19}{3} < b < 7 \end{aligned}$$

となる。

[ii]  $f(2) = 0$  のとき

$f(2) = 0$  のとき  $b = 7$  であるから、 $f(x) = x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$  となるが、  
 $f(x) = 0$  は  $2 < x < 3$  に解をもたないから不適である。

[iii]  $f(3) = 0$  のとき

$f(3) = 0$  のとき  $b = \frac{19}{3}$  であるから、 $f(x) = x^2 - \frac{19}{3}x + 10 = (x - 3)\left(x - \frac{10}{3}\right)$  となるが、  
 $f(x) = 0$  は  $2 < x < 3$  に解をもたないから不適である。

[2] 解をちょうど2つもつとき

$b$  の条件は、 $f(x) = 0$  の判別式を  $D$  として

$$\begin{cases} D > 0 \\ 2 < \frac{b}{2} < 3 \\ f(2) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} &\begin{cases} D > 0 \\ 2 < \frac{b}{2} < 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} b^2 - 40 > 0 \\ 4 < b < 6 \end{cases} \end{aligned}$$

となるが、これを同時に満たす  $b$  は存在しないから不適である。

以上、[1]、[2]より、 $b$  の範囲は

$$\frac{19}{3} < b < 7$$

である。

(2)

$N$  を自然数とする。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} C_2 &= \sum_{n=1}^N \frac{2}{(n+1)n} \\ &= 2 \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2 \left( 1 - \frac{1}{N+1} \right) \end{aligned}$$

となるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} C_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \left( 1 - \frac{1}{N+1} \right) = 2$$

である。また

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{{}_{2n+2}C_{n+1}}{{}_{2n}C_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{n!n!}{(2n)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{n+1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned} \int_0^{a_n} x \sqrt{a_n^2 - x^2} dx &= \left[ -\frac{1}{3} (a_n^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{a_n} \\ &= \frac{1}{3} a_n^3 \end{aligned}$$

である。このとき

$$a_{n+1} = a_n^3$$

が成立し、 $a_n > 0$  より両辺の自然対数をとることができて

$$\begin{aligned} \log a_{n+1} &= 3 \log a_n \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= 3b_n \end{aligned}$$

となる。 $b_1 = \log 2$  であるから

$$b_n = 3^{n-1} \log 2$$

となる。

(4)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos \left( n\pi - \frac{k\pi}{n} \right) &= \sum_{k=1}^n \left( \cos n\pi \cos \frac{k\pi}{n} + \sin n\pi \sin \frac{k\pi}{n} \right) \\ &= (-1)^n \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで  $z = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$  とおくと、ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left( \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} \right) &= \sum_{k=1}^n z^k \\ &= \frac{z - z^{n+1}}{1 - z} \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} - \left\{ \cos \left( \pi + \frac{\pi}{n} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{n} \right) \right\}}{1 - \cos \frac{\pi}{n} - i \sin \frac{\pi}{n}} \\ &= 2 \cdot \frac{\left( \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} \right) \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} \right)}{\left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2 + \sin^2 \frac{\pi}{n}} \\ &= -1 + i \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 - \cos \frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

となり、実部同士を比較して

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{n} = -1$$

となる。よって

$$\sum_{k=1}^n \cos \left( n\pi - \frac{k\pi}{n} \right) = (-1)^{n+1}$$

となる。

(5)

$k$  を0以上の整数として、 $n$  を3で割った余りで場合分けする。

[1]  $n = 3k + 1$  のとき

$$3m + 5(3k + 1) = 3(m + 5k + 1) + 2$$

より、 $m$  は自然数、 $k$  は0以上の整数であることから、3で割って2余る8以上の自然数は集合の要素になる。

[2]  $n = 3k + 2$  のとき

$$3m + 5(3k + 2) = 3(m + 5k + 3) + 1$$

より、 $m$  は自然数、 $k$  は0以上の整数であることから、3で割って1余る13以上の自然数は集合の要素になる。

[3]  $n = 3k + 3$  のとき

$$3m + 5(3k + 3) = 3(m + 5k + 5)$$

より、 $m$  は自然数、 $k$  は0以上の整数であることから、3で割りきれる18以上の自然数は集合の要素になる。

以上、[1]、[2]、[3]より、求める数は15である。