

## 2023 年 度 入 学 試 験 問 題

# 数 学

### 注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 90 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。



〔 I 〕  $\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$  を満たす  $x$  に対して、関数  $f(x)$  を

$$f(x) = (1 - \tan x + 2 \tan^2 x - 3 \tan^3 x) \left( 1 - \frac{1}{\tan x} + \frac{2}{\tan^2 x} - \frac{3}{\tan^3 x} \right)$$

によって定める。 $t = \tan x + \frac{1}{\tan x}$  とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $t$  の取り得る値の範囲を求めよ。
- (2)  $f(x)$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3)  $f(x)$  の最大値と最小値、およびそのときの  $x$  の値をそれぞれ求めよ。

〔Ⅱ〕  $\angle ACB = 90^\circ$  であるような直角三角形  $ABC$  を考える。  $BC$  を一辺とする正三角形  $BPC$  を  $\triangle ABC$  の外側につくり、  $CA$  を一辺とする正三角形  $CQA$  を  $\triangle ABC$  の外側につくる。  $\triangle BPC$ 、  $\triangle CQA$  の重心をそれぞれ  $G_1$ 、  $G_2$  とし、  $G_1$  と  $G_2$  の距離を  $d$  とする。  $\triangle ABC$  の外心を  $O$ 、 外接円の半径を  $R$  とし、  $\angle BAC = \theta$  とおくとき、 次の問いに答えよ。

- (1) 辺  $BC$ 、  $CA$  および線分  $OG_1$  の長さを、 それぞれ  $R$  と  $\theta$  を用いて表せ。
- (2)  $d$  を  $R$  と  $\theta$  を用いて表せ。
- (3)  $R$  を一定に保ったまま  $\theta$  が変化するとき、  $d$  の最大値を  $R$  を用いて表せ。

また、  $d$  が最大となるとき、 3 辺の長さの比  $BC : CA : AB$  を求めよ。

〔Ⅲ〕 1 から 9 までの各自然数が 1 枚に 1 つずつ書かれた 9 枚のカードがある。それらをよくまぜてから 1 枚のカードを取り出し、取り出したカードに書かれた数を  $a$  とする。次に、残った 8 枚のカードから 1 枚を取り出し、取り出したカードに書かれた数を  $b$  とする。 $a, b$  を用いて 2 桁の自然数  $n = 10a + b$  を作るとき、次の  をうめよ。

(1)  $n$  が 4 の倍数である確率は  ① である。

(2)  $n^2 - n$  が 10 の倍数になるような  $b$  をすべて求めると  $b =$   ② だから、 $n^2 - n$  が 10 の倍数である確率は  ③ である。

(3)  $n^2 - n$  が 100 の倍数である確率は  ④ であり、 $n^2 - n$  が 100 の倍数であるような最大の  $n$  は  ⑤ である。

〔Ⅳ〕  $n$  次の整式  $f(x)$  について恒等式  $2f(x) = xf'(x) + x - 2$  が成り立つとき、次の  をうめよ。

$n = 1$  のとき、 $f(x) =$   ①  である。

$n \geq 2$  とする。 $f(x)$  の最高次の項を  $ax^n$  とおく。ただし、 $a$  は 0 でない実数である。 $2f(x)$  における  $x^n$  の係数は  ②  であり、 $xf'(x) + x - 2$  における  $x^n$  の係数は  ③  である。よって、 $2f(x) = xf'(x) + x - 2$  が成り立つとき  $n =$   ④  であることがわかる。このとき、どんな実数  $x$  に対しても  $f(x)$  が 1 を値にとらないための、実数  $a$  に対する必要十分条件は  $a <$   ⑤  である。

(以上)











