

## 2023 年度 入 学 試 験 問 題

# 数 学

### 注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。



〔 I 〕 関数  $f(x) = \frac{\cos x}{3 + 2 \sin x}$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) に対して

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

とおく。次の問いに答えよ。

- (1)  $F(x)$  を求めよ。さらに、 $F(x)$  の最小値とそのときの  $x$  の値を求めよ。
- (2)  $f(x)$  の最大値を求めよ。ただし、最大値を与える  $x$  の値は求めなくてよい。
- (3)  $f(x)$  が最大となる  $x$  の値を  $\alpha$  とする。このとき、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\alpha\right) F\left(\frac{k}{n}\alpha\right)$$

を求めよ。

〔Ⅱ〕 次の  をうめよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$  とし、 $i$  を虚数単位とする。

$x^4 + 4 = 0$  の解のうち実部と虚部がともに正であるものを  $\alpha$  とおくと、  
 $\alpha =$   ①  である。このとき、 $|\alpha^n| > 10^{100}$  となる最小の自然数  $n$  は  
 ②  である。 $\alpha^n$  が実数であるための必要十分条件は  $n$  が  ③  の倍数  
であることであり、さらに、 $\alpha^n > 10^{100}$  となる自然数  $n$  のうち最小のものは  
 ④  である。

また、自然数  $n$  について  $\alpha^{-n}$  の実部を  $a_n$  とおく。このとき、自然数  $k$  につい  
て  $a_{4k-3} =$   ⑤   $\left( \text{ ⑥$   $\right)^k$  であり、無限級数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{4k-3}$  の和は  ⑦   
である。

〔Ⅲ〕 すべての角の大きさが  $120^\circ$  である六角形 ABCDEF において、

$AB = CD = DE = AF = 1$ ,  $BC = EF = 2$  であるとする。また、線分 BF の中点を P とし、2 線分 AC, BE の交点を Q とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (2) ベクトル  $\overrightarrow{AQ}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (3) 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ。さらに、点 Q を通り、直線 AC に垂直な直線を引き、辺 EF との交点を R とする。内積  $\overrightarrow{FR} \cdot \overrightarrow{AQ}$  を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の  をうめよ。

- (1) 複素数  $\alpha, \beta, \gamma$  が  $x$  についての恒等式

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 + 3x^2 + 2x + 4 \text{ を満たすとき,}$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$$

の値は  である。

- (2) 3 個の数字 1, 2, 3 を重複を許して使ってできる 5 桁の数の中から 1 つを選ぶとき, 1, 2, 3 の数字がすべて含まれている確率は  である。

- (3)  $\cos^2 \theta - \frac{1}{9} \sin^2 \theta = 0$  のとき,  $\cos 2\theta$  の値は  である。また,  $k$  を自然数とする。  $0 < \theta < k\pi$  のとき, 方程式  $\cos^2 \theta - \frac{1}{9} \sin^2 \theta = 0$  の解の個数を  $k$  を用いて表すと  である。

- (4) 極方程式  $r = \frac{3}{1 + 2 \sin \theta}$  で表された曲線の漸近線のうち, 傾きが正のものを直交座標に関する方程式で表すと  $y =$   である。

- (5)  $2023^{2023}$  の一の位の数字は  である。

(以上)











