2023 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学

注　意　事　項

1．試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。

2．解答はすべて黒鉛筆（ＨＢ）〈シャープペンシルは，ＨＢ 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。

3．解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し，切取線から切り離してください。

4．試験時間は 60 分です。

5．問題は３ページで大問３問です。余白は計算用紙です。

〔Ⅰ〕 数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = 1,\ na_{n+1} = 3(n+1)a_n + 2^n n(n+1) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。次の $\boxed{}$ をうめよ。

$b_n = \dfrac{a_n}{2^n n}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n を用いて表すと，

$$b_{n+1} = \boxed{①}\, b_n + \boxed{②}$$

となる。この漸化式は

$$b_{n+1} + \boxed{③} = \boxed{④}\left(b_n + \boxed{③}\right)$$

と変形できて，数列$\left\{b_n + \boxed{③}\right\}$は公比 $\boxed{④}$ の等比数列となる。

よって，$b_n = \boxed{⑤}$ であり，$a_n = n\left(\boxed{⑥}\right)$となる。

〔Ⅱ〕 次の $\boxed{}$ をうめよ。ただし，$\boxed{②}$ は a の式で，$\boxed{③}$ は a の1次式で，その他は数値でうめよ。

$a > 1$ を満たす定数に対して，2つの曲線 $y = x^2 - ax - a$ と $y = ax^2 + 3x$ が異なる2点で交わるような a の値の範囲は，$1 < a < \dfrac{\boxed{①}}{3}$ である。この範囲の a に対して，2点を結ぶ直線の傾き t は，a を用いて，$t = \boxed{②}$ と表される。$\boxed{②}$ を変形すると，

$$t = -\left(\boxed{③} + \frac{\boxed{④}}{\boxed{③}}\right) - 2$$

と表される。t は $a = \boxed{⑤}$ のとき，最大値 $\boxed{⑥}$ をとる。

〔Ⅲ〕 関数

$$f(x) = 10^{\frac{x}{50}} - 4 \cdot 10^{\frac{x}{100}} - 3 \cdot 10^{-\frac{x}{100}} + 12 \cdot 10^{-\frac{x}{50}}$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $t = 10^{\frac{x}{100}}$ とおくとき，$10^{\frac{x}{50}} f(x)$ を t についての多項式で表せ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ を満たす実数 x をすべて求めよ。

(3) 不等式 $f(x) < 0$ を満たす整数 x の個数を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

（以上）