

2023 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 90 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 a を正の実数とする。3 次関数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$ と 2 次関数 $g(x) = -x^2 + a$ について、次の問いに答えよ。

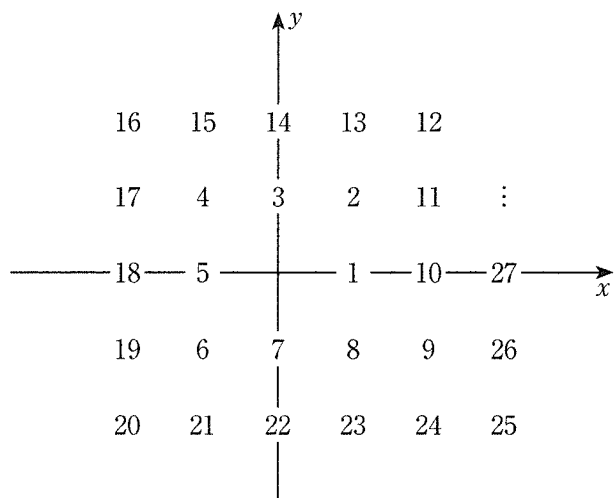
(1) xy 平面内の 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ がちょうど 2 つの共有点をもつとき、 a の値を求めよ。

(2) (1) のとき、2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

(3) 直線 $x = 0$ によって (2) の D を 2 つの部分に分割し、 x 座標が 0 以下である部分の面積を S_1 、 x 座標が 0 以上である部分の面積を S_2 とする。このとき、 $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

〔Ⅱ〕 xy 平面上で点 $(1, 0)$ の位置に数字 1 を置き、以下、図のように格子点に反時計回りの渦巻き状に数字 2, 3, 4, …… を配置する。ただし、格子点とは x 座標, y 座標がともに整数である点をいう。

- (1) x 軸の正の部分に位置する数字を, x 座標の小さいほうから並べて $a_1, a_2, a_3, \dots$ として数列 $\{a_n\}$ を定める。一般項 a_n を n の式で表せ。
- (2) 直線 $y = x$ の第 1 象限にある部分に位置する数字を, x 座標の小さいほうから並べて $b_1, b_2, b_3, \dots$ として数列 $\{b_n\}$ を定める。一般項 b_n を n の式で表せ。また、初項から第 n 項までの和 $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$ を求めよ。



〔Ⅲ〕 空間内の四面体 OABC において、辺 OA の中点を P とし、辺 OB を 2:1 に内分する点を Q とする。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき、次の をうめよ。

$\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せば、 $\overrightarrow{PQ} = \text{①} \vec{a} + \text{②} \vec{b}$ となる。

点 O から直線 AC に垂線を引き、交点を R とする。 $|\vec{a}| = |\vec{c} - \vec{a}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$ であるとき、 $\overrightarrow{PR} = \text{③} \vec{a} + \text{④} \vec{c}$ となる。このとき、四面体 OABC を 3 点 P, Q, R を通る平面で切断し、その切断面と直線 BC の交点を S とすれば、 $\frac{BS}{SC} = \text{⑤}$ である。

[IV] N を 2 以上の自然数とする。1 枚のコインを投げて、表が出たときは続けてもう一度投げる。裏が出たときはそこで止めて「終了」とする。ただし、表が続けて N 回出たときにはそこで止めて「終了」とする。「終了」したとき、表が続けて n 回出ていれば、賞金 $f(n)$ 円がもらえるものとする ($1 \leq n \leq N$)。表が 1 度も出なかったときは、賞金は 0 円とする。ただし、 $f(n)$ は正の値をとる n の関数である。次の $\square$ をうめよ。

0 以上 N 以下の整数 n に対して、「終了」したとき表が丁度 n 回出ている確率を $p(n)$ とおく。表が 1 度も出ない確率 $p(0) = \square \text{①}$ である。また、 $1 \leq n < N$ のとき $p(n) = \square \text{②}$ であり、 $p(N) = \square \text{③}$ である。

いま、 $f(n)$ が正数 r を用いて $f(n) = 2^{n+1}r^n$ によって与えられているとき、 $E = \sum_{n=1}^N p(n)f(n)$ とおけば、

$r = 1$ のとき $E = \square \text{④}$ であり、 r が 1 でなければ $E = \square \text{⑤}$ である。

