

2023 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 e を自然対数の底とする。 $x > 0$ を定義域とする関数 $f(x)$ は次の条件を満たす。

$$f'(x) = ef(x) + \frac{e^{ex}}{x}, \quad f(1) = 0$$

ただし、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $\frac{f(x)}{e^{ex}}$ の導関数を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ を求めよ。
- (3) 関数 $\frac{f'(x)}{e^{ex}}$ の増減を調べ、方程式 $f'(x) = 0$ の正の解を求めよ。

〔Ⅱ〕 m を 7 で割ったときの余りが 5 となる整数とする。 k を自然数とすると、次の をうめよ。ただし、 ⑤ と ⑥ 以外は数値でうめ、また、 $1 \leq$ ② ≤ 9 とする。

m^k を 7 で割ったときの商を q_k 、余りを a_k とおくと、 $m^k = 7q_k + a_k$ ($0 \leq a_k \leq 6$) と表されることから、 $a_1 = 5$ 、 $a_2 =$ ① である。さらに、 a_{k+1} は ② $\times a_k$ を 7 で割ったときの余りに等しいことがわかる。これを繰り返して、 a_1 、 a_2 、 a_3 、 …… を計算することができる。

$a_k = a_1$ となる 1 より大きい自然数 k の中で最小のものを ℓ とおくと、 $\ell =$ ③ である。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると、 $S_{\ell-1}$ の値は ④ であり、 S_{ℓ^n} を n の式で表すと $S_{\ell^n} = \frac{\text{ ⑤}}{2}$ である。

さらに、 S_{ℓ^n} を ℓ 進法で表すと ⑥ 桁であり、 ⑥ 桁目の数字は ⑦ である。

〔Ⅲ〕 i を虚数単位とし、複素数 $\alpha = -(\sqrt{3} - 1) + i$, $\beta = -1 + 2i$, $z_0 = -1$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 複素数 $\frac{\alpha - \beta}{z_0 - \beta} - i$ を表す点 P と、半直線 OP が実軸の正の部分となす角を解答欄の複素数平面上に図示せよ。

(2) 複素数平面上で $\frac{\alpha - \beta}{z_0 - \beta}$ を表す点と、(1) で求めた点 P との位置関係に注目し、 $\frac{\alpha - \beta}{z_0 - \beta}$ の偏角 θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で求めよ。

(3) $z_n = \left(\frac{\alpha - \beta}{z_0 - \beta} \right)^n (z_0 - \beta) + \beta$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。複素数平面上で、 z_0, β を表す 2 点を通る直線と z_n, β を表す 2 点を通る直線が垂直に交わるような自然数 n のうち最小のものを求めよ。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

- (1) 2次方程式 $x^2 - bx + 10 = 0$ が $2 < x < 3$ の範囲に少なくとも1つ実数解をもつとき、実数 b のとりうる値の範囲は ① である。

- (2) ${}_nC_r$ を n 個から r 個取る組合せの総数とする。無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} {}_nC_2$ の和は

② である。また、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{{}_{2n+2}C_{n+1}}{{}_{2n}C_n}$ は ③ である。

- (3) 数列 $\{a_n\}$ の各項は正の数であり、次の2つの条件を満たす。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3 \int_0^{a_n} x \sqrt{a_n^2 - x^2} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

定積分 $\int_0^{a_n} x \sqrt{a_n^2 - x^2} dx$ を a_n を用いて表すと ④ である。さらに、

$\log a_n = b_n$ とおき、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めると $b_n =$ ⑤ である。

- (4) n を自然数とする。和 $\sum_{k=1}^n \cos\left(n\pi - \frac{k\pi}{n}\right)$ を n を用いて表すと ⑥ である。

- (5) 集合 $\{3m + 5n \mid m, n \text{ は自然数}\}$ の要素でない自然数のうち、最大のものは ⑦ である。

(以上)

