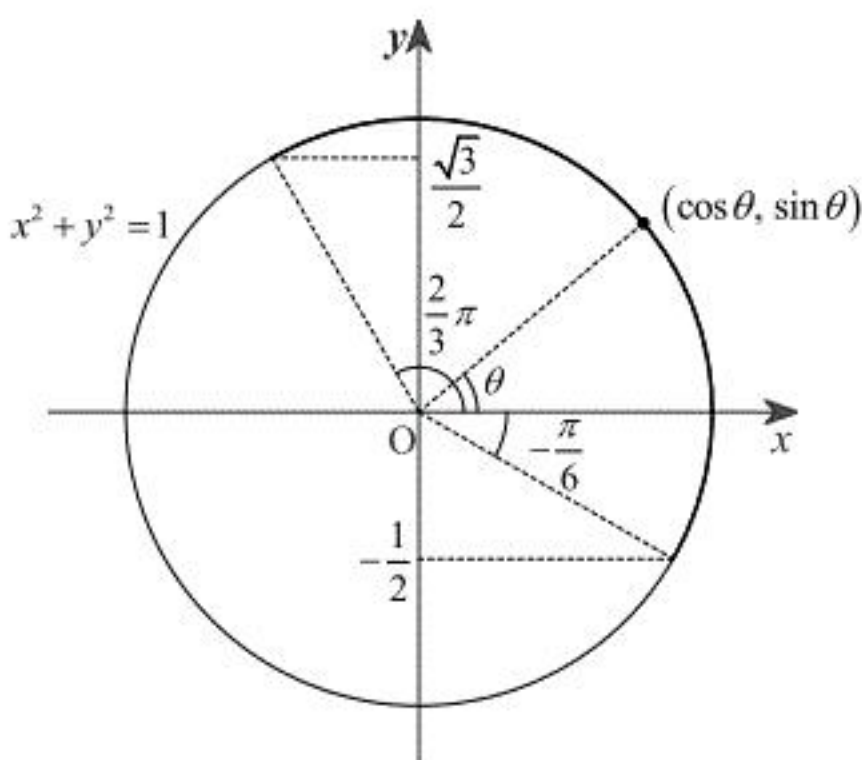


〔I〕

(1)

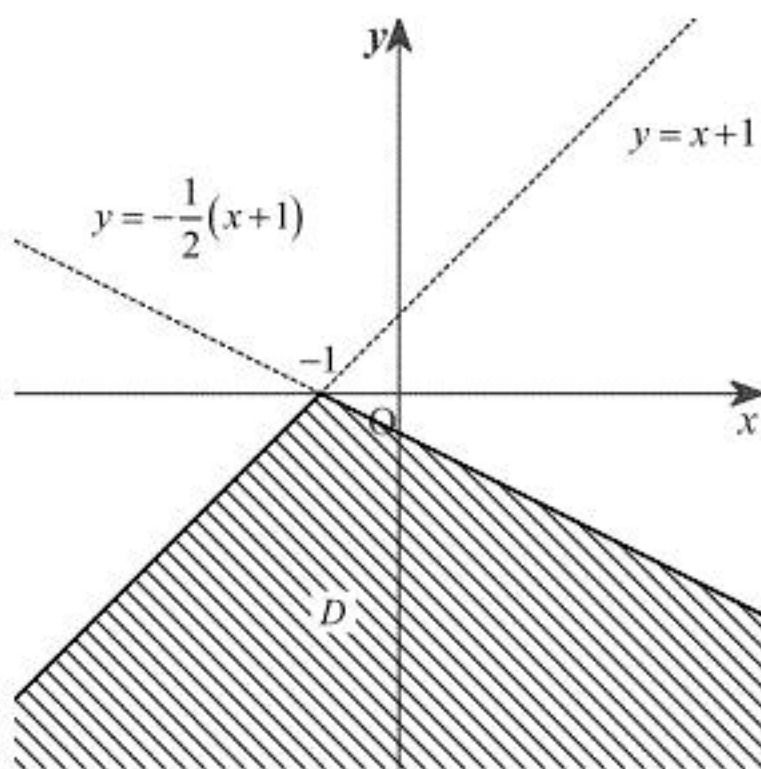


角 θ の動径と単位円との交点の y 座標は $\sin \theta$ となる。よって、上図より、 $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$ のとき、 $\sin \theta$ のとり得る値の範囲は $-\frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq 1$ である。

(答) $-\frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq 1$

(2)

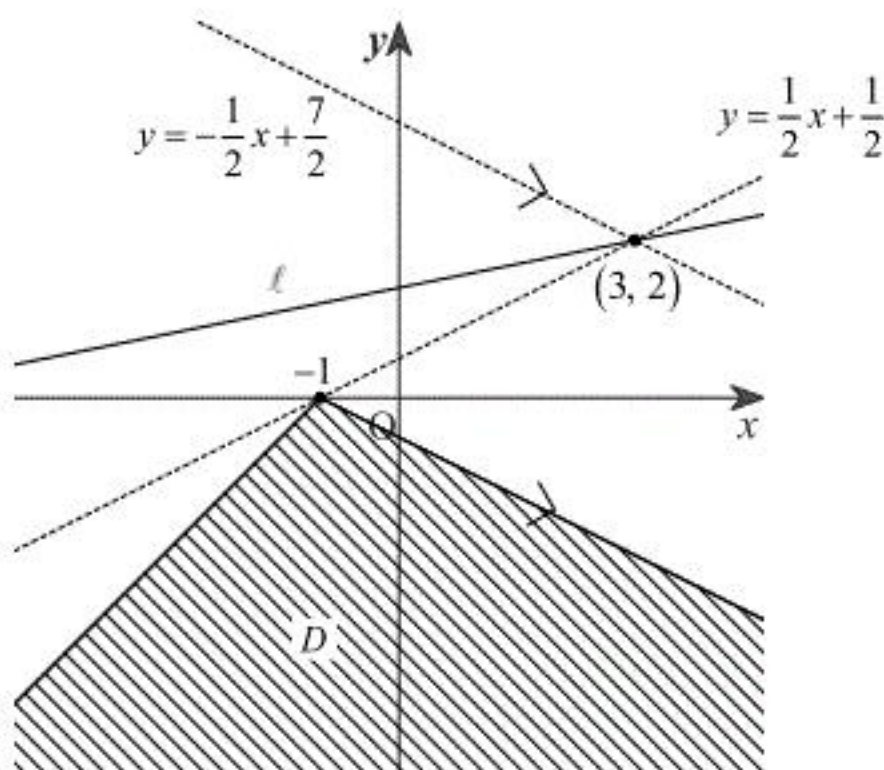
(1)より $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$ である。また、直線 $y = a(x+1)$, $y = b(x+1)$ は共に点 $(-1, 0)$ を通る。以上より、領域 D は下図の斜線部分のようになる。ただし、境界線を含む。



(答) 前図(境界線を含む)

(3)

直線 ℓ は m の値によらず点 $(3, 2)$ を通る。よって、直線 ℓ と領域 D の位置関係は下図のようになる。



上図より、直線 ℓ が領域 D と共有点を持たないとき、 m のとり得る値の範囲は $-\frac{1}{2} \leq m < \frac{1}{2}$ である。

(答) $-\frac{1}{2} \leq m < \frac{1}{2}$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

	①	②	③	④
(1)	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{9}{100}$
	⑤	⑥	⑦	
(2)	4	$\frac{1}{4}$	3	

〔解説〕

(1)

$f(t)$ の導関数は

$$\begin{aligned} f'(t) &= -25t^3 + 45t^2 - 23t + 3 \\ &= -25(t-1)\left(t^2 - \frac{4}{5}t + \frac{3}{25}\right) \\ &= -25(t-1)\left(t - \frac{1}{5}\right)\left(t - \frac{3}{5}\right) \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ の増減は下表のようになる。

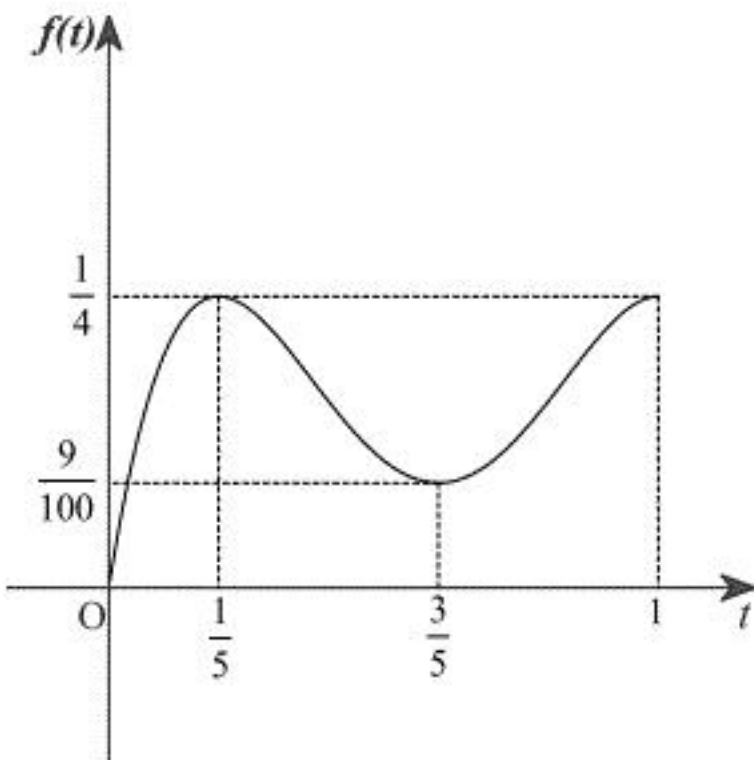
t	0	...	$\frac{1}{5}$	...	$\frac{3}{5}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	0	+	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{9}{100}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$

上表より、関数 $f(t)$ は $0 \leq t \leq 1$ において $t = \frac{1}{5}$ および $t = 1$ で最大値をとり、 $t = \frac{3}{5}$ における

$f(t)$ の値は $\frac{9}{100}$ である。

(2)

(1)の増減表より、 $0 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ のグラフは下図のようになる。



ここで、 $t = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) とすると、 $0 \leq t \leq 1$ であり

$0 \leq t < 1$ のとき t に対応する x は 2 個

$t = 1$ のとき t に対応する x は 1 個

となる。また、上図より、 t についての方程式 $f(t) = m$ は、 $0 \leq t \leq 1$ の範囲において、

$m < 0$ のとき解をもたない

$0 \leq m < \frac{9}{100}$ のとき $0 \leq t < 1$ に 1 個の解をもつ

$m = \frac{9}{100}$ のとき $0 \leq t < 1$ に 2 個の解をもつ

$\frac{9}{100} < m < \frac{1}{4}$ のとき $0 \leq t < 1$ に 3 個の解をもつ

$m = \frac{1}{4}$ のとき $0 \leq t < 1, t = 1$ にそれぞれ 1 個ずつ解をもつ

$\frac{1}{4} < m$ のとき解をもたない

となる。 $g(x) = f(\sin x) = f(t)$ より、 x についての方程式 $g(x) = m$ の $0 \leq x \leq \pi$ の範囲における異なる解の個数 n は、

$m < 0$ のとき $n = 0$

$0 \leq m < \frac{9}{100}$ のとき $n = 2$

$m = \frac{9}{100}$ のとき $n = 2 \cdot 2 = 4$

$\frac{9}{100} < m < \frac{1}{4}$ のとき $n = 2 \cdot 3 = 6$

$m = \frac{1}{4}$ のとき $n = 2 + 1 = 3$

$\frac{1}{4} < m$ のとき $n = 0$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	①		
	$a+\frac{1}{3}$		
(2)	②	③	④
	$-\frac{1}{2}$	$-a-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}a^3+a+\frac{1}{3}$
(3)	⑤	⑥	
	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{1}{3}$	

〔解説〕

(1)

$a>0$ のとき、 $a\leq t\leq a+1$ において

$$t^2-a^2\geq 0$$

であるため、

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_a^{a+1} |t^2-a^2| dt \\ &= \int_a^{a+1} (t^2-a^2) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - a^2t \right]_a^{a+1} \\ &= a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$a<0$ のとき、

$$\begin{aligned} t^2-a^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (t+a)(t-a) &\leq 0 \\ \therefore a \leq t \leq -a \quad (\because a < 0) \end{aligned}$$

であるため、命題「 $a\leq t\leq a+1 \Rightarrow a\leq t\leq -a$ 」が真となるような a の範囲は、

$$\begin{aligned} a+1 &\leq -a \\ \therefore a &\leq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。また、 $a\leq -\frac{1}{2}$ のとき、 $a\leq t\leq a+1$ において $t^2-a^2\leq 0$ であるため、

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_a^{a+1} |t^2-a^2| dt \\ &= -\int_a^{a+1} (t^2-a^2) dt \\ &= -\left[\frac{1}{3}t^3 - a^2t \right]_a^{a+1} \\ &= -a - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。さらに、 $-\frac{1}{2}<a\leq 0$ のとき、 $a\leq t\leq -a$ ならば $t^2-a^2\leq 0$ であり、 $-a\leq t\leq a+1$ ならば $t^2-a^2\geq 0$ であるため、

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_a^{a+1} |t^2-a^2| dt \\ &= -\int_a^{-a} (t^2-a^2) dt + \int_{-a}^{a+1} (t^2-a^2) dt \\ &= -\left[\frac{1}{3}t^3 - a^2t \right]_a^{-a} + \left[\frac{1}{3}t^3 - a^2t \right]_{-a}^{a+1} \\ &= -\frac{8}{3}a^3 + a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

(3)

(1)(2)より、

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{3} & (x > 0) \\ -\frac{8}{3}x^3 + x + \frac{1}{3} & \left(-\frac{1}{2} < x \leq 0\right) \\ -x - \frac{1}{3} & \left(x \leq -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

である。また、 $-\frac{1}{2}<x<0$ のとき、 $f(x)$ の導関数は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -8x^2 + 1 \\ &= -8\left(x + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \end{aligned}$$

である。以上より、 $f(x)$ の増減は下表のようになる。

x	...	$-\frac{1}{2}$	...	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	...	0	...
$f'(x)$	-		-	0	+		+
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{1}{3}$	$\nearrow$		$\nearrow$

上表より、 $f(x)$ は $x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ において最小値 $-\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{3}$ をとる。