

【Ⅰ】

(1)

$f(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}x + \sqrt{4-x^2}}{\sqrt{12-3x^2}} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}x + \sqrt{4-x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}x &= -\sqrt{4-x^2} \end{aligned}$$

となる。 $\sqrt{4-x^2} \geq 0$ より、上式が成り立つには、 $x \leq 0$ が必要である。 $x \leq 0$ のもとで両辺を

2乗すると

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 4-x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 1 \\ \therefore x &= -1 \quad (\because x \leq 0) \end{aligned}$$

となる。よって、 $-2 \leq x \leq \sqrt{3}$ において $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

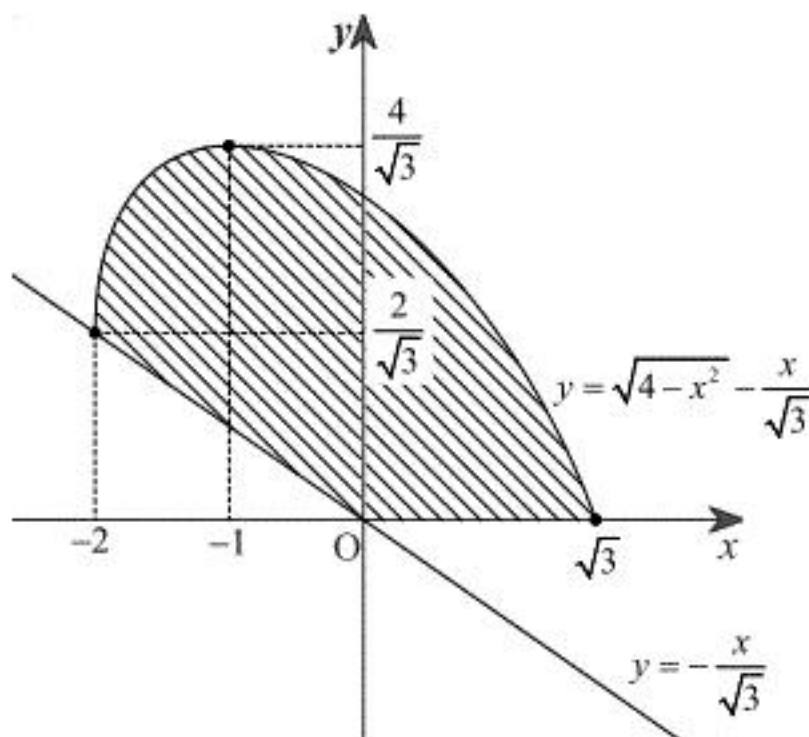
x	-2	...	-1	...	$\sqrt{3}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

したがって、 $f(x)$ は $x = -1$ において最大値 $\frac{4}{\sqrt{3}}$ をとり、 $x = \sqrt{3}$ において最小値 0 をとる。

(答) 最大値： $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ，最小値：0

(2)

(1)より、図形 A を図示すると下図の斜線部となる。



よって、図形 A の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 \left\{ \sqrt{4-x^2} - \frac{x}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{x}{\sqrt{3}} \right) \right\} dx + \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2} - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) dx \\ &= \int_{-2}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{3}} dx \\ &= \int_{-2}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx - \left[\frac{x^2}{2\sqrt{3}} \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \int_{-2}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで $\int_{-2}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx$ について、 $x = 2 \sin \theta$ とおくと、

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

であり、 x, θ は以下のように対応する。

$$\begin{array}{c|ccc} x & -2 & \rightarrow & \sqrt{3} \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{2} & \rightarrow & \frac{\pi}{3} \end{array}$$

これより、

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4-4\sin^2 \theta} \cdot 2 \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} |\cos \theta| \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta d\theta \quad (\because \cos \theta \geq 0) \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \left(-\frac{\pi}{2} + 0 \right) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{3} \pi \end{aligned}$$

となる。したがって、面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{5}{3} \pi \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{5}{3} \pi$

(3)

(2)の図より、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^0 \left\{ \left(\sqrt{4-x^2} - \frac{x}{\sqrt{3}} \right)^2 - \left(-\frac{x}{\sqrt{3}} \right)^2 \right\} dx + \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2} - \frac{x}{\sqrt{3}} \right)^2 dx \\ &= \pi \int_{-2}^0 \left(4-x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} x \sqrt{4-x^2} \right) dx + \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(4-x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} x \sqrt{4-x^2} + \frac{x^2}{3} \right) dx \\ &= \pi \int_{-2}^{\sqrt{3}} \left(4-x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} x \sqrt{4-x^2} \right) dx + \pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \int_{-2}^{\sqrt{3}} -2x \sqrt{4-x^2} dx + \pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{\sqrt{3}} + \pi \left[\frac{x^3}{9} \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \int_{-2}^{\sqrt{3}} (4-x^2)' \sqrt{4-x^2} dx + \pi \left(3\sqrt{3} + \frac{16}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{2}{3} (4-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^{\sqrt{3}} + \frac{16+10\sqrt{3}}{3} \pi \\ &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi + \frac{16+10\sqrt{3}}{3} \pi \\ &= \frac{48+32\sqrt{3}}{9} \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{48+32\sqrt{3}}{9} \pi$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$\frac{5}{3}\pi$

〔解説〕

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx \text{ について,}$$

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} dx \\ &= [x]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。また,

$$\begin{aligned} 3I - J &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3 \sin x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3 \sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx \\ &= -\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx \\ &= -\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)'}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx \\ &= -\sqrt{3} \left[\log |\sin x + \sqrt{3} \cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -\sqrt{3} (\log \sqrt{3} - \log \sqrt{3}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。以上より,

$$\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{3} \\ 3I - J = 0 \end{cases}$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{12}, J = \frac{\pi}{4}$$

を得る。また, 等式

$$(\sin x + \alpha \cos x)(\sin x + \beta \cos x) = 5 + 4 \cos 2x + 2\sqrt{3} \sin 2x \quad (\alpha < \beta)$$

が成り立つとき,

$$\begin{aligned} (\sin x + \alpha \cos x)(\sin x + \beta \cos x) &= 5 + 4 \cos 2x + 2\sqrt{3} \sin 2x \\ \Leftrightarrow \sin^2 x + (\alpha + \beta) \sin x \cos x + \alpha \beta \cos^2 x &= 5 + 4(2 \cos^2 x - 1) + 2\sqrt{3}(2 \sin x \cos x) \\ \Leftrightarrow (\alpha \beta - 1) \cos^2 x + (\alpha + \beta) \sin x \cos x + 1 &= 8 \cos^2 x + 4\sqrt{3} \sin x \cos x + 1 \\ \Leftrightarrow (\alpha \beta - 9) \cos^2 x + (\alpha + \beta - 4\sqrt{3}) \sin x \cos x &= 0 \end{aligned}$$

が, x についての恒等式となるから,

$$\begin{cases} \alpha \beta = 9 \\ \alpha + \beta = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

が成り立つ。2 次方程式の解と係数の関係より, α, β は X の 2 次方程式

$$\begin{aligned} X^2 - 4\sqrt{3}X + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (X - \sqrt{3})(X - 3\sqrt{3}) &= 0 \end{aligned}$$

の 2 解となるから,

$$\alpha = \sqrt{3}, \beta = 3\sqrt{3} \quad (\because \alpha < \beta)$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{10 + 8 \cos 2x + 4\sqrt{3} \sin 2x}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2(5 + 4 \cos 2x + 2\sqrt{3} \sin 2x)}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)(\sin x + 3\sqrt{3} \cos x)}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + 3\sqrt{3} \cos x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx \\ &= 2(I + 3J) \\ &= 2\left(\frac{\pi}{12} + \frac{3}{4}\pi\right) \\ &= \frac{5}{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅳ〕

解答

(1)	①	
	12384	
(2)	②	③
	0, 16	$0 < k < 16$
(3)	④	⑤
	$7+2\sqrt{3}$	$52+24\sqrt{3}$
(4)	⑥	⑦
	$\frac{2(\alpha-1)}{\beta+2}$	(1, 0, 0)

解説

(1)
 $12400=344\cdot 36+16$
より、
 $344\cdot 36=12384$
であるから、題意を満たす N は12384 である。

(2)

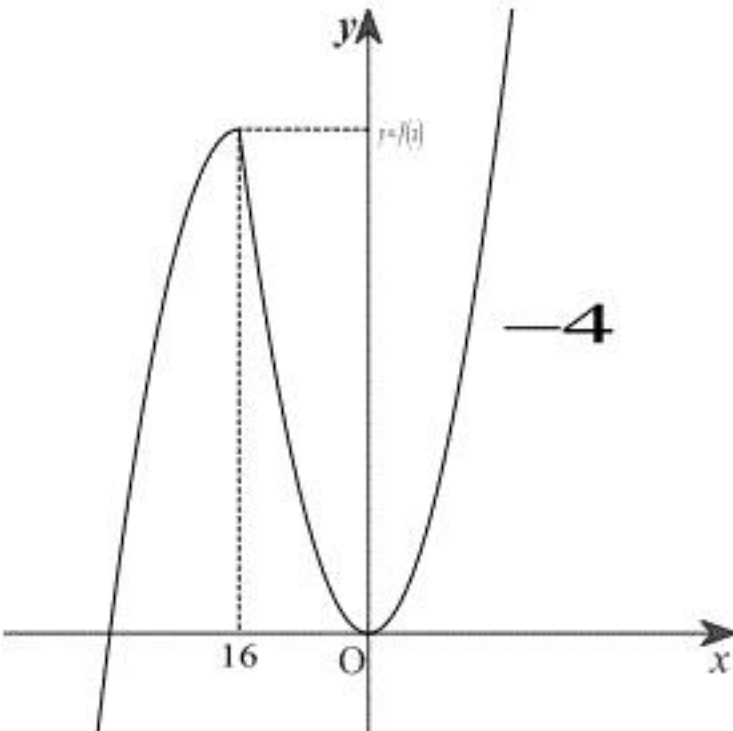
$$x|x+4|=4x+k$$

$$\Leftrightarrow x|x+4|-4x=k$$
である。この方程式の解の個数が曲線 $y=x|x+4|-4x$ と直線 $y=k$ の共有点の個数に一致する。 $f(x)=x|x+4|-4x$ とおくと、

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geq -4) \\ -x^2-8x & (x<-4) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^2 & (x\geq -4) \\ -(x+4)^2+16 & (x<-4) \end{cases}$$

であるから、 $y=f(x)$ のグラフは以下のようになる。



よって、共有点が2個であるとき $k=0, 16$ であり、共有点が3個であるとき $0 < k < 16$ である。

(3)
 $\triangle PQR$ は正三角形であるから、

$$(4+ai)-(1+i)=\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}\{(b+3i)-(1+i)\}$$

$$\Leftrightarrow 3+(a-1)i=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\{(b-1)+2i\}$$

$$\Leftrightarrow 3+(a-1)i=\frac{1}{2}(b-1)+i\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(b-1)i\mp\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}b-\frac{7}{2}\mp\sqrt{3}\right)+\left(-a+2\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(b-1)\right)i=0 \quad (\text{複合同順})$$

である。いま a, b は実数であるから、

$$\begin{cases} \frac{1}{2}b-\frac{7}{2}\mp\sqrt{3}=0 \\ -a+2\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(b-1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b=7\pm2\sqrt{3} \\ a=2\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(7\pm2\sqrt{3}-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(a,b)=(5+3\sqrt{3}, 7+2\sqrt{3}), (5-3\sqrt{3}, 7-2\sqrt{3})$$

となる。いま $a>0$ であるから、 $(a,b)=(5+3\sqrt{3}, 7+2\sqrt{3})$ である。よって、

$$\begin{aligned} L^2 &= (4-1)^2+(5+3\sqrt{3}-1)^2 \\ &= 9+16+24\sqrt{3}+27 \\ &= 52+24\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(4)
条件より、 $B(1,-2,0)$ である。点 Q は直線 BP 上にあり、 $\alpha>0, \beta>0$ のもとで点 Q は線分 BP の端点を除いた部分の点である。よって、 $0<t<1$ を満たす実数 t を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BP} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} \alpha-1 \\ \beta+2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+t(\alpha-1) \\ -2+t(\beta+2) \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。また点 Q は xz 平面上にあるから、

$$\begin{aligned} -2+t(\beta+2) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{2}{\beta+2} \end{aligned}$$

である。よって点 Q の x 座標は

$$1+\frac{2(\alpha-1)}{\beta+2}$$

である。また点 P が平面 $z=1$ と平面 $x=k$ の交線上を動くとき、 $\alpha=k$ であるから、点 Q の座標は

$$Q\left(1+\frac{2(k-1)}{\beta+2}, 0, \frac{2}{\beta+2}\right)$$

と表せる。ここで $Q(X, 0, Z)$ とおくと、 $X=1+\frac{2(k-1)}{\beta+2}, Z=\frac{2}{\beta+2}$ であるから、

$X=1+(k-1)Z$ となる。よって点 Q は直線 $x=1+(k-1)z$ 上の点である。このとき、点 Q は k の値によらない定点 $(1, 0, 0)$ を通る。