

2024 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔 I 〕 関数 $f(x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x}{\sqrt{3}}$ ($-2 \leq x \leq \sqrt{3}$) について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の最大値、最小値を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸、および直線 $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ で囲まれた図形 A の面積を求めよ。

(3) (2) の図形 A を、 x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

〔Ⅱ〕 $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx$ とする。このとき、
次の を数値でうめよ。

定積分を計算すると、

$$\begin{cases} I + J = \text{①} \\ 3I - J = \text{②} \end{cases}$$

となる。この連立方程式を解くことにより、

$$I = \text{③}, \quad J = \text{④}$$

を得る。また、等式

$$(\sin x + \alpha \cos x)(\sin x + \beta \cos x) = 5 + 4 \cos 2x + 2\sqrt{3} \sin 2x$$

が成り立つように、定数 α, β ($\alpha < \beta$) を定めると、

$$\alpha = \text{⑤}, \quad \beta = \text{⑥}$$

である。したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{10 + 8 \cos 2x + 4\sqrt{3} \sin 2x}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2} dx = \text{⑦}$$

となる。

〔Ⅲ〕 箱 A には玉が 1 個入っており，箱 B，箱 C には玉が入っていない。次の試行を行う。1 個のさいころを投げ，次の (a)，(b) にしたがって玉を操作する。

(a) 箱 A または箱 B に玉が入っている場合，

- ・ 1 または 2 の目が出たときには，箱 A と箱 B のうち玉が入っている方の箱から玉が入っていない方の箱に玉を移動させる。
- ・ 3 または 4 または 5 の目が出たときには玉を箱 C に移動させる。
- ・ 6 の目が出たときには玉を移動させない。

(b) 箱 C に玉が入っている場合，出た目によらず玉を移動させない。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) この試行を n 回行ったとき，箱 A または箱 B に玉が入っている確率を求めよ。

(2) この試行を n 回行ったとき，箱 A に玉が入っている確率を p_n とする。試行を n 回行ったとき，箱 B に玉が入っている確率を p_n ， n の式で表せ。

(3) p_{n+1} を p_n ， n の式で表せ。

(4) $2^n p_n = q_n$ とおく。数列 $\{q_n\}$ の一般項を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

- (1) a, b を 0 以上 9 以下の整数とし、 ab を下 2 桁とする 5 桁の自然数 $N = 123ab$ を考える。 N が 36 の倍数となるような組 (a, b) のうち、 N が最大となるのは

① である。

- (2) 曲線 $y = x|x + 4|$ と直線 $y = 4x + k$ の共有点が 2 個であるときの k の値は ② である。また、共有点が 3 個であるような、定数 k の値の範囲は ③ である。

- (3) $a > 0, b > 0$ とし、複素数平面上の 3 点 $P(1 + i), Q(4 + ai), R(b + 3i)$ を頂点とする $\triangle PQR$ が正三角形であるとする。このとき、 $b =$ ④ である。さらに、 $\triangle PQR$ の 1 辺の長さを L とすると、 $L^2 =$ ⑤ である。

- (4) 点 $A(1, 2, 0)$ に対して、 xz 平面に関して対称な点を B とする。また、正の数 α, β に対して、 z 軸に垂直な平面 $z = 1$ 上の点 $P(\alpha, \beta, 1)$ をとる。このとき、直線 BP と xz 平面の交点 Q の座標を α, β を用いて表すと

$$\left(1 + \text{⑥}, 0, \frac{2}{\beta + 2}\right)$$

である。さらに、 k を定数とする。点 P が平面 $z = 1$ と平面 $x = k$ の交線上を動くとき、点 Q は xz 平面上のある直線上を動く。この直線は k の値に関係なく定点を通る。その定点の座標空間における座標は ⑦ である。

(以上)

