

〔Ⅰ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$	x^2-3x-2	3	11	3	2

〔解説〕

$\alpha = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ に対して,

$$\begin{aligned}\beta &= -\frac{2}{\alpha} \\ &= -\frac{2}{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} \\ &= -\frac{4(3-\sqrt{17})}{(3+\sqrt{17})(3-\sqrt{17})} \\ &= \frac{3-\sqrt{17}}{2}\end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha - \beta = \sqrt{17} \\ \alpha\beta = -2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。よって、①より、 α, β を解にもつ2次方程式は,

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta &= 0 \\ \therefore x^2 - 3x - 2 &= 0\end{aligned}$$

とわかる。また、①より,

$$\begin{aligned}a_2 &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{\sqrt{17} \cdot 3}{\sqrt{17}} \\ &= 3 \\ a_3 &= \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{(\alpha - \beta)\{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta\}}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{\sqrt{17} \cdot \{3^2 - (-2)\}}{\sqrt{17}} \\ &= 11\end{aligned}$$

である。同様に数列 $\{a_n\}$ について,

$$\begin{aligned}a_{n+2} &= \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n - \beta^n)}{\sqrt{17}} \\ &= (\alpha + \beta) \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{17}} - \alpha\beta \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{17}} \\ &= 3a_{n+1} + 2a_n\end{aligned}$$

を得る。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$-a$	$a+2$	$x^2 - a^2 - 2a$	$-x^2 + 4x + a^2 + 2a$	$-2a$	$2a+4$	$a^2 + 2a + 4$

〔解説〕

2次不等式 $x^2 - 2x - a^2 - 2a \geq 0$ の解は

$$x^2 - 2x - a^2 - 2a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+a)\{x-(a+2)\} \geq 0$$

$$\therefore x \leq -a, a+2 \leq x \quad (\because a > 0)$$

である。このとき(*)は,

$$x^2 - 2x - a^2 - 2a = -2x + k$$

$$\Leftrightarrow k = x^2 - a^2 - 2a$$

と変形される。また, $-a < x < a+2$ のとき $x^2 - 2x - a^2 - 2a < 0$ であることから(*)は,

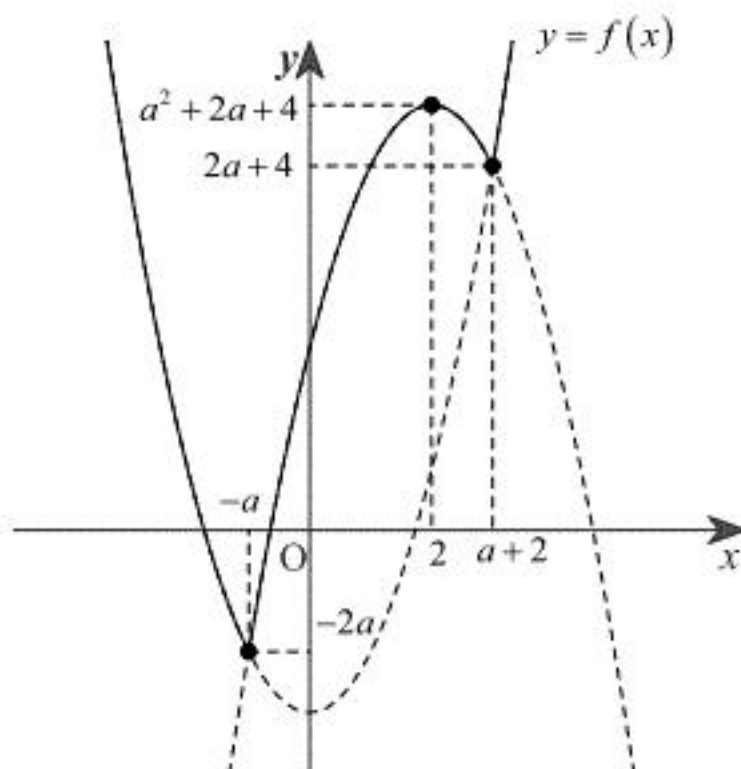
$$-(x^2 - 2x - a^2 - 2a) = -2x + k$$

$$\Leftrightarrow k = -x^2 + 4x + a^2 + 2a$$

と変形される。このとき, 関数 $y = f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a^2 - 2a & (x \leq -a, a+2 \leq x) \\ -x^2 + 4x + a^2 + 2a & (-a < x < a+2) \end{cases}$$

とおく。 $y = f(x)$ のグラフは $f(-a) = -2a < 0$, $f(a+2) = 2a+4 > 0$ より以下のようなになる。



(*)の異なる実数解の個数は $y = f(x)$ と直線 $y = k$ の交点の個数と等しい。したがって, 上図より異なる実数解の個数が2個となる k の値の範囲は $-2a < k < 2a+4$, $a^2 + 2a + 4 < k$ である。

〔Ⅲ〕

(1)

$\overrightarrow{OA} = (-2, 4)$, $\overrightarrow{OB} = (2\sqrt{3}-1, t)$ であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= -2 \cdot (2\sqrt{3}-1) + 4 \cdot t \\ &= 4t - 4\sqrt{3} + 2\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 4t - 4\sqrt{3} + 2$

(2)

$\triangle OAB$ が正三角形であるための必要十分条件は,

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \angle AOB = 60^\circ \\ |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos 60^\circ \\ |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}|^2 \\ |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| \end{cases}\end{aligned}$$

である。ここで,

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = (-2)^2 + 4^2 = 20$$

であるから, これを(1)の結果とあわせて, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}|^2$ に用いると

$$\begin{aligned}4t - 4\sqrt{3} + 2 &= 10 \\ \therefore t &= 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。このとき,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OB}|^2 &= (2\sqrt{3}-1)^2 + (2+\sqrt{3})^2 \\ &= 20\end{aligned}$$

となるから, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$ も成り立つ。以上より, 求める t の値は $t = 2 + \sqrt{3}$ である。

(答) $t = 2 + \sqrt{3}$

(3)

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが $O(0, 0)$, $A(-2, 4)$, $B(2\sqrt{3}-1, 2+\sqrt{3})$ を通るから,

$$\begin{aligned}0 &= c && \dots \textcircled{1} \\ 4 &= 4a - 2b + c && \dots \textcircled{2} \\ 2 + \sqrt{3} &= (2\sqrt{3}-1)^2 a + (2\sqrt{3}-1)b + c && \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。①を②に代入して整理すると,

$$\begin{aligned}4 &= 4a - 2b \\ \Leftrightarrow b &= 2a - 2 && \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

となる。また, ①と④を③に代入して整理すると,

$$\begin{aligned}2 + \sqrt{3} &= (13 - 4\sqrt{3})a + (2\sqrt{3}-1)(2a-2) \\ \Leftrightarrow 11a &= 5\sqrt{3} \\ \therefore a &= \frac{5\sqrt{3}}{11}\end{aligned}$$

となる。また, ④より,

$$b = 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{11} - 2 = \frac{10\sqrt{3}}{11} - 2$$

である。以上より, 求める a, b, c の値はそれぞれ $a = \frac{5\sqrt{3}}{11}$, $b = \frac{10\sqrt{3}}{11} - 2$, $c = 0$ である。

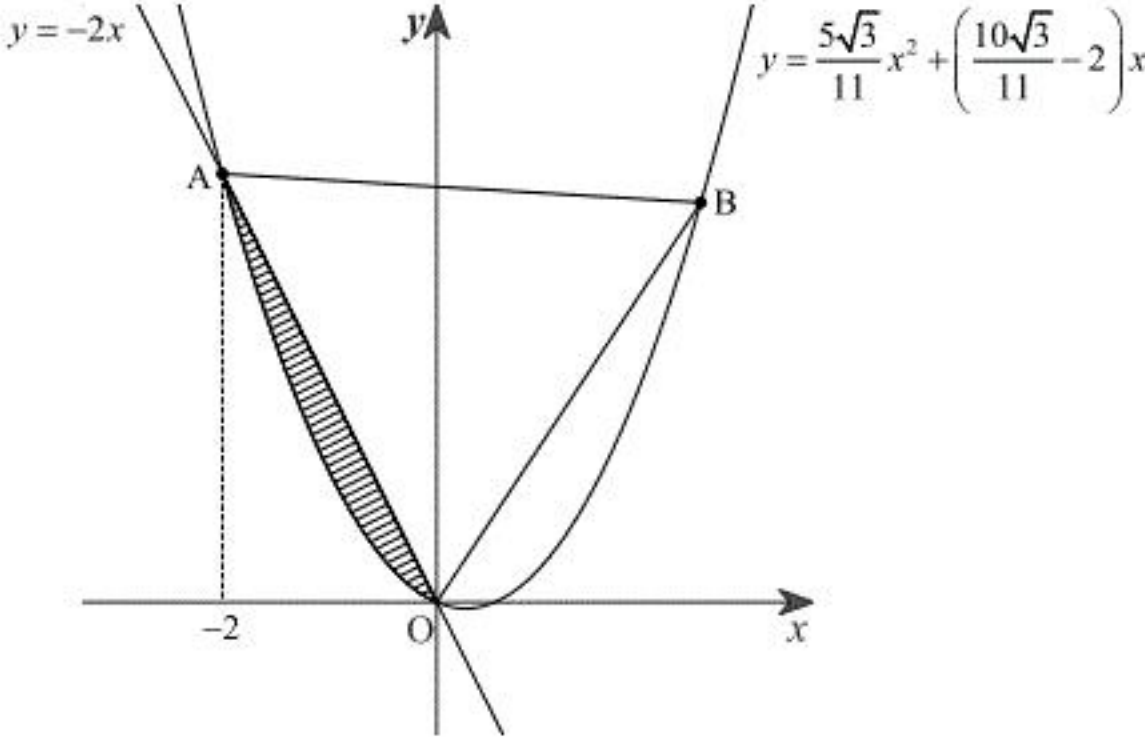
(答) $a = \frac{5\sqrt{3}}{11}$, $b = \frac{10\sqrt{3}}{11} - 2$, $c = 0$

(4)

(3)の結果より, 放物線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx + c \\ \Leftrightarrow y &= \frac{5\sqrt{3}}{11}x^2 + \left(\frac{10\sqrt{3}}{11} - 2\right)x\end{aligned}$$

である。また, 直線 OA の方程式は $y = -2x$ である。よって, (3)の放物線と直線 OA で囲まれた図形を座標平面上に図示すると, 次図の斜線部分のようになる。



したがって, 求める図形の面積 S は,

$$\begin{aligned}S &= \int_{-2}^0 \left[-2x - \left\{ \frac{5\sqrt{3}}{11}x^2 + \left(\frac{10\sqrt{3}}{11} - 2 \right)x \right\} \right] dx \\ &= \int_{-2}^0 \left(-\frac{5\sqrt{3}}{11}x^2 - \frac{10\sqrt{3}}{11}x \right) dx \\ &= -\frac{5\sqrt{3}}{11} \int_{-2}^0 x(x+2) dx \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{11} \cdot \frac{\{0 - (-2)\}^3}{6} \\ &= \frac{20\sqrt{3}}{33}\end{aligned}$$

である。

(答) $S = \frac{20\sqrt{3}}{33}$