

〔I〕

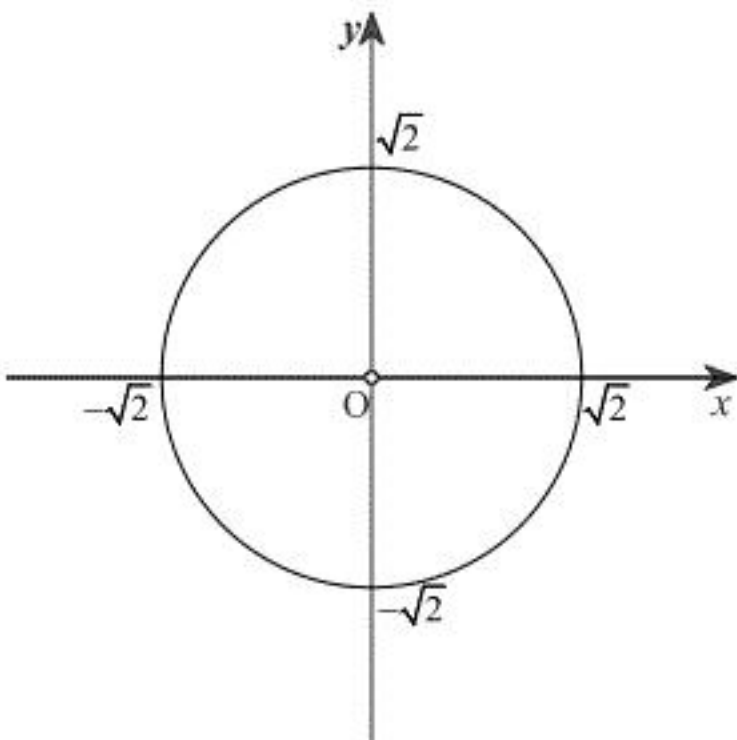
(1)

$$\begin{aligned} z + \frac{2}{z} &= x + yi + \frac{2}{x + yi} \\ &= x + yi + \frac{2(x - yi)}{(x + yi)(x - yi)} \\ &= x + yi + \frac{2(x - yi)}{x^2 + y^2} \\ &= x \cdot \frac{x^2 + y^2 + 2}{x^2 + y^2} + y \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 + y^2} i \end{aligned}$$

である。ここで、 $z + \frac{2}{z}$ が実数となるとき、

$$\begin{aligned} y \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 + y^2} &= 0 \\ \therefore y &= 0 \text{ または } x^2 + y^2 = 2 \end{aligned}$$

である。また、 $z \neq 0$ より、 $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ である。よって、 $z + \frac{2}{z}$ が実数となるような点 (x, y) の軌跡は以下のように図示できる。



(答) 前図(ただし、白丸は含まない)

(2)

z が 0 でない実数全体を動くとき、(1)より $z + \frac{2}{z}$ は実数となる。ここで実数 k を用いて

$$z + \frac{2}{z} = k \text{ とおくと、このとき}$$

$$z + \frac{2}{z} = k \Leftrightarrow z^2 - kz + 2 = 0 \quad (\because z \neq 0)$$

より、 $z + \frac{2}{z}$ のとりうる値の範囲は、 z の実数係数の 2 次方程式 $z^2 - kz + 2 = 0$ が実数解をもつ条件に等しい。判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= k^2 - 8 \geq 0 \\ \Leftrightarrow k &\leq -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \leq k \end{aligned}$$

となるから、 $z + \frac{2}{z}$ のとりうる値の範囲は、

$$z + \frac{2}{z} \leq -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \leq z + \frac{2}{z}$$

である。

$$(答) \quad z + \frac{2}{z} \leq -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \leq z + \frac{2}{z}$$

(3)

$z + \frac{2}{z}$ が実数となるとき、(1)より、

$$y = 0 \text{ または } x^2 + y^2 = 2$$

である。ここで、 z が虚数全体を動くとき、 $y \neq 0$ であるから、 z が、 $z + \frac{2}{z}$ が実数となるような虚数全体を動くとき、

$$x^2 + y^2 = 2 \text{ かつ } y \neq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} z + \frac{2}{z} &= x \cdot \frac{2 + 2}{2} \\ &= 2x \end{aligned}$$

となり、①より、 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ であるから、 $z + \frac{2}{z}$ のとりうる値の範囲は、

$$-2\sqrt{2} < z + \frac{2}{z} < 2\sqrt{2}$$

となる。

$$(答) \quad -2\sqrt{2} < z + \frac{2}{z} < 2\sqrt{2}$$

【Ⅱ】

【解答】

	①	②	③	④
(1)	0	$-\frac{9}{8}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{15}}{16}$
(2)	⑤	⑥	⑦	
	$-3 \leq k < -2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	-3	

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= -2\sin 2x + \sin x \\ &= -4\sin x \cos x + \sin x \\ &= \sin x(1 - 4\cos x)\end{aligned}$$

より、 $\cos x = \frac{1}{4}$ をみたす $x\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ を a とすると、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減は以下の通りになる。

x	0	...	a	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	−1

このとき、

$$\begin{aligned}f(a) &= \cos 2a - \cos a \\ &= 2\cos^2 a - 1 - \cos a \\ &= -\frac{9}{8}\end{aligned}$$

であるから、最大値は0、最小値は $-\frac{9}{8}$ である。また、このとき、 $\cos a = \frac{1}{4}$ であるから、

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = \frac{15}{16}$$

となり、 $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $\sin a > 0$ であるから、 $\sin a = \frac{\sqrt{15}}{4}$ である。さらに、定積分 $\int_0^a f(x)dx$ の値は

$$\begin{aligned}\int_0^a (\cos 2x - \cos x)dx &= \left[\frac{1}{2}\sin 2x - \sin x\right]_0^a \\ &= \frac{1}{2}\sin 2a - \sin a \\ &= \sin a \cos a - \sin a \\ &= \sin a(\cos a - 1) \\ &= -\frac{3\sqrt{15}}{16}\end{aligned}$$

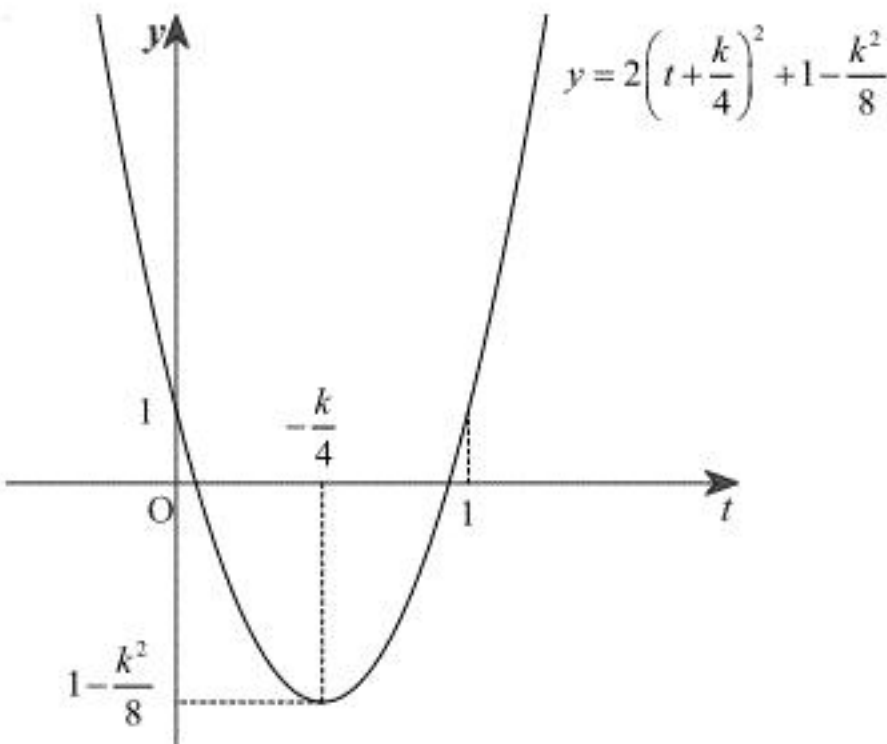
である。

(2)

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $t = \cos x$ とおくと、この範囲で t は単調減少するため t は x と一対一で対応し、値域は $0 \leq t \leq 1$ となる。このとき、

$$\begin{aligned}y &= \cos 2x + k\cos x + 2 \\ &= 2\cos^2 x + k\cos x + 1 \\ &= 2t^2 + kt + 1 \\ &= 2\left(t + \frac{k}{4}\right)^2 + 1 - \frac{k^2}{8}\end{aligned}$$

となる。 $g(t) = 2\left(t + \frac{k}{4}\right)^2 + 1 - \frac{k^2}{8}$ とおき、 $0 \leq t \leq 1$ における $y = g(t)$ と t 軸との共有点の個数について考える。共有点が2つであるとき、 $y = g(t)$ のグラフは下図のようになる。



求める条件は、

$$\begin{cases} 0 < -\frac{k}{4} < 1 \\ g(1) \geq 0 \\ 1 - \frac{k^2}{8} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < k < 0 \\ k + 3 \geq 0 \\ k < -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} < k \end{cases}$$

$$\therefore -3 \leq k < -2\sqrt{2}$$

となる。また、 $0 \leq t \leq 1$ における $y = g(t)$ と t 軸との共有点が1つである条件について、

$y = g(t)$ のグラフの軸 $t = -\frac{k}{4}$ の位置で場合分けして考える。

[1] $-\frac{k}{4} < 0$ のとき

$g(0) = 1$ かつ、 $0 \leq t \leq 1$ の範囲で $g(t)$ は単調増加であるから、共有点をもたない。

[2] $0 \leq -\frac{k}{4} \leq 1$ のとき

$g(0) = 1$ より、 $y = g(t)$ のグラフの頂点が t 軸の $0 \leq t \leq 1$ の部分にあるとき、あるいは $g(1) < 0$ のとき、1つの共有点をもつ。この条件は、

$$\begin{cases} 0 \leq -\frac{k}{4} \leq 1 \\ 1 - \frac{k^2}{8} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq k \leq 0 \\ k = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\therefore k = -2\sqrt{2}$$

または、

$$\begin{cases} 0 \leq -\frac{k}{4} \leq 1 \\ g(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq k \leq 0 \\ k + 3 < 0 \end{cases}$$

$$\therefore -4 \leq k < -3$$

となるから、 $-4 \leq k < -3$ 、 $k = -2\sqrt{2}$ である。

[3] $-\frac{k}{4} > 1$ のとき

$g(0) = 1$ かつ、 $0 \leq t \leq 1$ の範囲で $g(t)$ は単調減少であるから、 $g(1) \leq 0$ のとき1つの共有点をもつ。この条件は、

$$\begin{cases} -\frac{k}{4} > 1 \\ g(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -4 \\ k + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\therefore k < -4$$

である。

以上、[1], [2], [3]より、求める k の値の範囲は、 $k = -2\sqrt{2}$ または $k < -3$ である。

〔Ⅲ〕

- (1) $AQ:QB=s:(1-s)$, $BR:RC=t:(1-t)$ より,

$$\overrightarrow{OQ}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OR}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OQ}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}, \overrightarrow{OR}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$$

- (2) $\overrightarrow{PR}=p\overrightarrow{PS}+q\overrightarrow{PQ}$ より, (1)から,

$$\overrightarrow{PR}=p\overrightarrow{PS}+q\overrightarrow{PQ}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ (1-t)\vec{b}+t\vec{c} \right\} - \frac{1}{3}\vec{a} = p \left\{ \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a} \right\} + q \left[\left\{ (1-s)\vec{a}+s\vec{b} \right\} - \frac{1}{3}\vec{a} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{1}{3}(1-p)+q \left(\frac{2}{3}-s \right) \right\} \vec{a} + (sq+t-1)\vec{b} + \left(\frac{1}{3}p-t \right) \vec{c} = \vec{0}$$

となる。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立なベクトルより,

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(1-p)+q \left(\frac{2}{3}-s \right) = 0 \\ sq+t-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}p-t=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}p-t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}(1-p)+q \left(\frac{2}{3}-s \right) = 0 \\ q = \frac{1-t}{s} \quad (\because s \neq 0) \\ p = 3t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1-t}{s} \quad (\because s \neq 0) \\ p = 3t \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = \frac{1-t}{s} \quad (\because s \neq 0) \\ p = 3t \end{cases}$$

となる。ここで, $\frac{1}{3}(1-p)+q \left(\frac{2}{3}-s \right) = 0$ に $p=3t, q=\frac{1-t}{s}$ を代入して,

$$\frac{1}{3}(1-3t)+\frac{1-t}{s} \left(\frac{2}{3}-s \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow s(1-3t)+(1-t)(2-3s)=0$$

$$\Leftrightarrow s+t=1$$

となるため, $s+t$ は定数であり, $s+t=1$ となる。

(証明終)

$$(\text{答}) \quad p=3t, q=\frac{1-t}{s}, s+t=1$$

- (3) 四面体 OABC は正四面体より $OA=OB=OC$ となり, 点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足が点 H より $\angle OHA=\angle OHB=\angle OHC=\frac{\pi}{2}$ が成立する。よって, $\triangle OHA \equiv \triangle OHB \equiv \triangle OHC$ となり, $AH=BH=CH$ が成立する。したがって, 点 H は $\triangle ABC$ の外心となり, $\triangle ABC$ は正三角形より点 H は $\triangle ABC$ の重心である。よって,

$$AH=\frac{2}{3}AB \cdot \sin \frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる。 $\triangle OHA$ に三平方の定理を用いて,

$$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}$$

$$=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

となる。ここで, 4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあるとき, (2)より $t=1-s$ となる。

$\triangle BQR \perp OH$ より四面体 OQBR の体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \triangle BQR \cdot OH &= \frac{1}{3} \cdot \frac{BQ}{AB} \cdot \frac{BR}{BC} \cdot \triangle ABC \cdot OH \\ &= \frac{1}{3}(1-s) \cdot t \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}(1-s)^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad OH=\frac{\sqrt{6}}{3}, \text{四面体 OQBR の体積: } \frac{\sqrt{2}}{12}(1-s)^2$$

【Ⅳ】

【解答】

(1)	①	
	$1 < x < \frac{16}{3}$	
(2)	②	③
	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$
(3)	④	
	$\frac{1}{2}p(p-1)$	
(4)	⑤	⑥
	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$	$-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$
(5)	⑦	
	$\frac{2}{135}$	

【解説】

(1)

真数条件より、

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ x+1>0 \\ 15-2x>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-1, 1<x \\ x>-1 \\ x<\frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\therefore 1< x < \frac{15}{2}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} \log_a(x^2-1)+\log_{\frac{1}{a}}(x+1) &= \log_a\{(x+1)(x-1)\}+\frac{\log_a(x+1)}{\log_a\frac{1}{a}} \\ &= \{\log_a(x+1)+\log_a(x-1)\}-\log_a(x+1) \\ &= \log_a(x-1) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \log_a(x^2-1)+\log_{\frac{1}{a}}(x+1) &> \log_a(15-2x) \\ \Leftrightarrow \log_a(x-1) &> \log_a(15-2x) \end{aligned}$$

となる。底 a は $0 < a < 1$ を満たすため、

$$\begin{aligned} x-1 &< 15-2x \\ \Leftrightarrow x &< \frac{16}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、求める解は、

$$\begin{cases} 1 < x < \frac{15}{2} \\ x < \frac{16}{3} \end{cases}$$

$$\therefore 1 < x < \frac{16}{3}$$

である。

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}}(a \sin x + b \cos x) = a \sin \frac{\pi}{3} + b \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b$$

である。また、極限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{a \sin x + b \cos x}{3x - \pi}$ が収束するとき、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}}(a \sin x + b \cos x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left\{ (3x - \pi) \cdot \frac{a \sin x + b \cos x}{3x - \pi} \right\} \\ &= 0 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{a \sin x + b \cos x}{3x - \pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b &= 0 \\ \therefore b &= -\sqrt{3}a \end{aligned}$$

であり、このとき、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{a \sin x + b \cos x}{3x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{a \sin x - \sqrt{3}a \cos x}{3x - \pi} \\ &= \frac{2}{3}a \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x}{x - \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2}{3}a \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{x - \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2}{3}a \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{a \sin x + b \cos x}{3x - \pi} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}a &= 1 \\ \therefore a &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

であり、

$$b = -\sqrt{3}a = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

となるため、求める値は、

$$a = \frac{3}{2}, b = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

である。

(3)

整数 n に対し、 $\frac{n}{p^2}$ が 0 より大きく 1 より小さい分数であるための必要十分条件は $0 < n < p^2$

である。よって、これらの総和は、

$$\sum_{n=1}^{p^2-1} \frac{n}{p^2} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{2} (p^2-1) \{ (p^2-1)+1 \} = \frac{1}{2} (p^2-1)$$

である。また、 p は素数であるため、整数 n に対し、 $\frac{n}{p^2}$ が 0 より大きく 1 より小さい分数で

あり、既約分数でないための必要十分条件は $0 < n < p^2$ かつ n が p の倍数であること、すなわち、 $1 \leq m \leq p-1$ を満たす整数 m を用いて $n = pm$ と表されることである。よって、これらの

総和は、

$$\sum_{m=1}^{p-1} \frac{pm}{p^2} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{2} (p-1) \{ (p-1)+1 \} = \frac{1}{2} (p-1)$$

である。以上より、 0 より大きく 1 より小さい既約分数で、分母が p^2 であるものの総和は、

$$\frac{1}{2} (p^2-1) - \frac{1}{2} (p-1) = \frac{1}{2} p (p-1)$$

である。

(4)

数列 $\{z_n\}$ の漸化式 $z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)z_n - \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$ より、

$$\begin{aligned} z_{n+1} - \alpha - \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(z_n - \alpha) &= \left\{ \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)z_n - \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) \right\} - \alpha - \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(z_n - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)\alpha - \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) \\ &= \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i) \left\{ \alpha - \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i) \right\} \end{aligned}$$

となるため、すべての自然数 n に対し、 $z_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(z_n - \alpha)$ が成り立つ複素数 α は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i) \left\{ \alpha - \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i) \right\} &= 0 \\ \therefore \alpha &= \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

である。また、 $z_1 = 1$ より、数列 $\{z_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} z_n - \alpha &= \left\{ \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) \right\}^{n-1} (z_1 - \alpha) = \left\{ \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) \right\}^{n-1} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i) \right\} = \left\{ \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) \right\}^n \\ \therefore z_n &= \left\{ \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) \right\}^n + \alpha \end{aligned}$$

である。ここで、ド・モアブルの定理より、

$$\left\{ \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) \right\}^n = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^n = \cos \frac{n}{3}\pi + i \sin \frac{n}{3}\pi$$

となるため、求める複素数 z_{2025} は、

$$\begin{aligned} z_{2025} &= \left\{ \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) \right\}^{2025} + \alpha \\ &= \cos \frac{2025}{3}\pi + i \sin \frac{2025}{3}\pi + \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i) \\ &= \cos 675\pi + i \sin 675\pi + \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i) \\ &= -1 + i \cdot 0 + \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i) \\ &= -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

である。

(5)

k 回目 ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) に出た目を a_k とする。1 回目と 2 回目に出た目の和が 6 であったとき、

$$(a_1, a_2) = (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$$

となる。よって、1 回目と 2 回目に出た目の和が 6 である場合の数は、

$$5 \cdot 6^4 (\text{通り})$$

である。ここで、1 回目と 2 回目に出た目の和が 6 であり、かつ、1 から 6 の目がそれぞれ 1 回ずつ出る場合の数を、組 (a_1, a_2) により場合分けをして考える。

[1] $(a_1, a_2) = (3, 3)$ のとき

1 から 6 の目がそれぞれ 1 回ずつ出ることはないため、求める場合の数は 0 通りである。

[2] $(a_1, a_2) = (1, 5), (2, 4), (4, 2), (5, 1)$ のとき

(a_1, a_2) を固定する。1 から 6 の目がそれぞれ 1 回ずつ出るとき、 a_3, a_4, a_5, a_6 は 1 から 6 のうち、 a_1, a_2 以外の 4 個の目が 1 回ずつ出るため、

$$4! = 24 (\text{通り})$$

である。よって、求める場合の数は、

$$24 \cdot 4 = 96 (\text{通り})$$

である。

以上、[1], [2] より、1 回目と 2 回目に出た目の和が 6 であり、かつ、1 から 6 の目がそれぞれ 1

回ずつ出る場合の数は、

$$0 + 96 = 96 (\text{通り})$$

である。よって、求める条件付き確率は、

$$\frac{96}{5 \cdot 6^4} = \frac{2}{135}$$

となる。