2025 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学

注 意 事 項

1．試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。

2．解答はすべて黒鉛筆（ＨＢ）〈シャープペンシルは，ＨＢ 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。

3．解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し，切取線から切り離してください。

4．試験時間は 100 分です。

5．問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。

6．解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 関数$f(x)=x^2e^{-2x}$を考える。次の問いに答えよ。ただし，$x>0$に対して，$e^{-2x}<\dfrac{1}{x^3}$が成り立つことを用いてよい。

(1) $f(x)$の第1次導関数と第2次導関数を求めよ。

(2) 曲線$y=f(x)$の凹凸を調べ，変曲点のx座標を求めよ。また，この関数のグラフの概形を解答欄の座標平面上に図示せよ。

(3) $a>0$とする。曲線$y=f(x)$，x軸および直線$x=a$とで囲まれる図形の面積を$S(a)$とするとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}S(a)$を求めよ。

〔Ⅱ〕 nを3以上の自然数とし，xを1以上$(n-1)$以下の自然数とする。いま，赤玉x個，白玉$(n-x)$個が入った袋の中から2個の玉を同時に取り出す試行を考える。次の $\boxed{}$ をうめよ。ただし，$\boxed{①}$ ～ $\boxed{④}$，$\boxed{⑦}$ は数値で，$\boxed{⑤}$，$\boxed{⑥}$ はnとxのうち，一方または両方を用いた式でうめよ。

(1) $n=3$，$x=1$とするとき，取り出した玉が2個とも白玉である確率は $\boxed{①}$ である。取り出した玉のうち，少なくとも1個は赤玉である確率は $\boxed{②}$ である。

(2) $n=5$，$x=2$とするとき，取り出した玉が2個とも白玉である確率は $\boxed{③}$ である。取り出した玉のうち，1個だけが赤玉である確率は $\boxed{④}$ である。

(3) nを4以上の自然数とする。取り出した玉が2個とも白玉である確率は $\dfrac{\boxed{⑤}}{n(n-1)}$ である。また，取り出した玉のうち，少なくとも1個は赤玉である確率が$\dfrac{1}{2}$以上となるための条件は，$\boxed{⑤} \leqq \boxed{⑥}$ である。

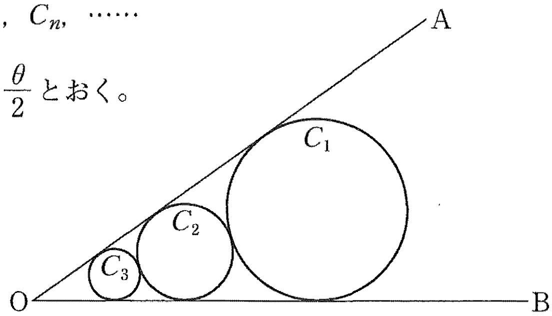
(4) $n=22$とする。取り出した玉のうち，少なくとも1個は赤玉である確率が$\dfrac{1}{2}$以上であるときのxの最小値は $\boxed{⑦}$ である。

〔Ⅲ〕 下の図において $\angle AOB$ を θ とする。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である。円 C_1 は半直線OA，OBに接し，さらに中心と点Oとの距離は1とする。次に，円 C_2 を，図のようにOA，OBおよび円 C_1 に接するようにO側に定める。同様に，円 C_3 を，OA，OBおよび円 C_2 に接するようにO側に定める。以下，この操作を繰り返して，円

$$C_4,\ C_5,\ C_6,\ \cdots\cdots,\ C_n,\ \cdots\cdots$$

を順に定めていく。また，$t = \sin\dfrac{\theta}{2}$ とおく。

次の問いに答えよ。



(1) 円 C_1 の半径と円 C_2 の半径を，それぞれ t を用いて表せ。

(2) 自然数 n に対して，円 C_n の半径を n と t を用いて表せ。

(3) 円 C_n の面積を S_n としたとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を t を用いて表せ。

(4) (3)で求めた無限級数の和を $S(\theta)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{\theta \to 0}\frac{S(\theta)}{\theta}$ を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) 方程式 $z^3 = -8$ のすべての解を z_1, z_2, z_3 とするとき,

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1| = \boxed{\ ①\ }$$

である。

(2) 座標平面に △OAB がある。線分 AB の延長線上に点 D を，OB が ∠AOD の二等分線となるようにとる。また，$\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{6}$, $\mathrm{OA} = 3$, $\mathrm{OB} = 2\sqrt{3}$ とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \boxed{\ ②\ }\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\ ③\ }\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である。

(3) 関数 $f(x) = x^{x^2}$ $(x > 0)$ を微分すると，$f'(x) = \left(\boxed{\ ④\ }\right)x^{x^2+1}$ となる。また，$f(x)$ の最小値は $e^{\boxed{\ ⑤\ }}$ である。

(4) 曲線 $y = 2x - (x-1)|x-1|$ のグラフを，x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動した曲線を $y = g(x)$ とする。このとき，すべての実数 x に対して，$g(x) = -g(-x)$ が成り立つとき，$a = \boxed{\ ⑥\ }$, $b = \boxed{\ ⑦\ }$ である。

(以上)