2025 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学

注　意　事　項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。

2. 解答はすべて黒鉛筆（ＨＢ）〈シャープペンシルは，ＨＢ 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。

3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し，切取線から切り離してください。

4. 試験時間は 90 分です。

5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。

6. 解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 平面内の直線 $y = 4ax + b$ が 2 つの放物線

$$y = x^2 - 12x + 21,\ \ y = -4x^2 + 8x - 4$$

のいずれとも共有点の個数が 0 または 1 となるような a, b を座標とする点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ のなす集合を D とする。

(1) D の面積を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が D を動くとき，$b - 4a^2$ のとりうる値の範囲を決定せよ。

〔Ⅱ〕 n を自然数として，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_1 = 2,\ \ a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$b_1 = 8,\ \ b_{n+1} = b_n + 2^{n+2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n，b_n を n の式で表せ。

(2) $I_n = \{x \mid a_n \leqq x \leqq b_n\}$ とするとき，すべての自然数 n に対して $I_n \cap I_{n+1}$ は空集合ではないことを示せ。

〔Ⅲ〕 1 以上 100 以下の自然数について，次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) 3 で割り切れる数の個数は $\boxed{①}$ で，それらの数の総和は $\boxed{②}$ である。

(2) 3 で割ると 2 余り，かつ，5 で割ると 3 余る数の個数は $\boxed{③}$ である。

(3) 100 と互いに素となる数の個数は $\boxed{④}$ である。

(4) 2 進数にしたときの桁数が 4 桁または 5 桁となる数の個数は $\boxed{⑤}$ で，それらの数の総和は $\boxed{⑥}$ である。

〔Ⅳ〕 次の $\boxed{}$ をうめよ。

3次方程式 $x^3-3x^2+px+q=0$ の解を α, β, γ とすれば，恒等式

$$x^3-3x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

が成り立つから $\alpha+\beta+\gamma=\boxed{①}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\boxed{②}$,

$\alpha\beta\gamma=\boxed{③}$ である。

$$S_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

とおくとき，S_2 と S_3 を p, q の式で表せば，それぞれ $S_2=\boxed{④}$,

$S_3=\boxed{⑤}$ となる。また，$S_2=21$ かつ $S_4=273$ のとき，$p=\boxed{⑥}$,

$q=\boxed{⑦}$ であり，$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\boxed{⑧}$ である。ただし，$\alpha<\beta<\gamma$ とする。

(以上)