2025 年度入学試験問題

数　　学

注　意　事　項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(ＨＢ)〈シャープペンシルは，ＨＢ 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し，切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 座標平面上に $x > 0$ で定義される2つの関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ があり，曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ をそれぞれ C_1, C_2 とする。また，C_1 と C_2 の共有点の x 座標を α とする。ただし，対数は自然対数とする。以下，必要ならば $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ を用いてよい。

(1) $f(x)$ の増減を調べて，$f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) α の値を求めよ。また，C_1 と C_2 の概形を解答欄の座標平面上に描け。

(3) $s > \alpha$ とし，直線 $x = s$ と C_1, C_2 の交点をそれぞれ P，Q とする。線分 PQ の長さの最大値とそのときの s の値を求めよ。

(4) $t > 0$ とする。C_1, C_2 および直線 $x = t$ で囲まれる図形の面積が2となるような t の値を求めよ。

◆A48(25－002)

〔Ⅱ〕 図のように，次の2つの規則(A)，(B)に従って自然数が並んでいる。

規則(A) 1行目は初項1，公差3の等差数列が，初項から並んでいる。

規則(B) 2行目以降の行は，1つ上の行の各数を3倍した数が並んでいる。

	1列目 ↓			
1行目→	1	4	7	……
	3	12	21	……
	9	36	63	……
	⋮	⋮	⋮	

図

また，各行に対して，左から順に1列目，2列目，……とする。例えば，2行目かつ3列目の数は21である。ℓ，m，nを自然数として，次の $\boxed{\quad\quad}$ をうめよ。

(1) m行目かつn列目の数をm，nを用いて表すと，$\boxed{①}$ である。また，19521は $\boxed{②}$ 行目かつ $\boxed{③}$ 列目の数である。

(2) 1行目の数の中で3^{ℓ}より小さいものの個数をℓを用いて表すと，$\boxed{④}$ である。また，2行目以降も同様に考えて，図に現れる自然数で3^{ℓ}より小さいものの総数をa_{ℓ}と表す。a_{ℓ}をℓを用いて表すと，$a_{\ell}=$ $\boxed{⑤}$ である。

(3) (2)で求めたa_{ℓ}に対して，$\dfrac{1}{a_{\ell}a_{\ell+1}}=\boxed{⑥}\left(\dfrac{1}{a_{\ell}}-\dfrac{1}{a_{\ell+1}}\right)$が成り立つ。また，和$\displaystyle\sum_{k=1}^{\ell}\frac{3^k}{a_k a_{k+1}}$を$\ell$を用いて表すと，$\boxed{⑦}$ である。

〔Ⅲ〕 四面体OABCは

$$\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=4,\ \mathrm{OC}=5,\ \angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$$

を満たしている。点Aから平面OBCに垂線を引き，平面OBCとの交点をHとする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とする。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{b}+q\vec{c}$（$p$，$q$は実数）と表すとき，$p$，$q$の値をそれぞれ求めよ。

(3) 線分OHの長さを求めよ。また，$\angle\mathrm{BOH}=\angle\mathrm{COH}$が成り立つことを示せ。

(4) 直線OHと辺BCの交点をMとするとき，OH：OMを求めよ。また，四面体ABCHの体積Vを求めよ。

〔Ⅳ〕 次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) a は正の定数とする。座標平面上で円 $x^2 + y^2 - 6ax + 2ay + 20a - 10 = 0$ は，a の値に関わらず定点を通り，その座標は $\boxed{①}$ である。また，この円が円 $x^2 + y^2 = 5$ と外接するのは，$a = \boxed{②}$ のときである。

(2) AB $=10$，BC $=6$，CA $=8$ の三角形 ABC の内接円 O と，辺 BC，CA との接点をそれぞれ D，E とする。このとき，BD $= \boxed{③}$ である。また，線分 BE と円 O との共有点のうち，E と異なる方を F として，円 O の中心を M とするとき，$\cos \angle \mathrm{EMF} = \boxed{④}$ である。

(3) i を虚数単位とする。$z = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ とし，z^n が実数となるような最小の自然数 n は $\boxed{⑤}$ である。また，このとき，$z^n = \boxed{⑥}$ である。

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^4+2}\left(1-\cos\dfrac{2}{x}\right)}{x}$ は $\boxed{⑦}$ である。

また，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^4+2}\left(1-\cos\dfrac{2}{x}\right)}{(2x+5)\tan\dfrac{3}{x}}$ は $\boxed{⑧}$ である。

(以上)