

2025 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔 I 〕 次の問いに答えよ。

- (1) 0 とは異なる複素数 $z = x + yi$ を考える。ただし, x, y は実数とし, i は虚数単位とする。 $z + \frac{2}{z}$ が実数となるような点 (x, y) の軌跡を解答欄の座標平面上に図示せよ。
- (2) z が 0 でない実数全体を動くとき, $z + \frac{2}{z}$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) z が, $z + \frac{2}{z}$ が実数となるような虚数全体を動くとき, $z + \frac{2}{z}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

〔Ⅱ〕 次の をうめよ。

- (1) 関数 $f(x) = \cos 2x - \cos x$ を考える。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の最大値は ① , 最小値は ② である。 $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ となる a に対して, $f(a) =$ ② を満たすとき, $\sin a =$ ③ である。さらに, 定積分 $\int_0^a f(x) dx$ の値は ④ である。

- (2) k を定数とする。曲線

$$y = \cos 2x + k \cos x + 2 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

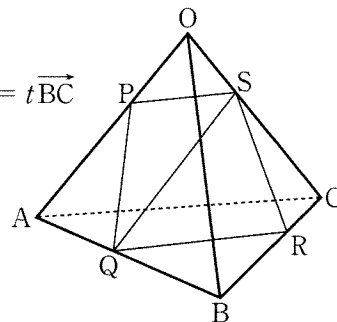
と x 軸との共有点が2つであるような k の値の範囲は ⑤ であり, 共有点が1つであるのは, $k =$ ⑥ または $k <$ ⑦ のときである。

〔Ⅲ〕 座標空間において四面体 $OABC$ を考える。 s, t を $0 < s < 1, 0 < t < 1$ となる定数とし、点 P, Q, R, S を、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{AQ} = s\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BR} = t\overrightarrow{BC}$$

を満たすようにとる。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b},$

$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{OQ}$ および $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, s, t$ を用いて表せ。

(2) 点 P が平面 QRS 上にあるとき、

$$\overrightarrow{PR} = p\overrightarrow{PS} + q\overrightarrow{PQ}$$

となる実数 p, q がある。このとき、 p, q を s と t のうち、一方または両方を用いた式でそれぞれ表せ。さらに、 $s + t$ は定数であることを示し、その値を求めよ。

(3) 四面体 $OABC$ を一辺の長さ 1 の正四面体とする。点 O から平面 ABC に下ろした垂線を OH とするとき、 OH の長さを求めよ。また、4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあるとき、四面体 $OQBR$ の体積を s を用いて表せ。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

- (1) $0 < a < 1$ とする。このとき、不等式

$$\log_a(x^2 - 1) + \log_{\frac{1}{a}}(x + 1) > \log_a(15 - 2x)$$

の解は ① である。

- (2) 定数 a, b に対して、 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{a \sin x + b \cos x}{3x - \pi} = 1$ を満たすとき、

$a =$ ② , $b =$ ③ である。

- (3) p を素数とする。0 より大きく 1 より小さい既約分数で、分母が p^2 であるものの総和は ④ である。

- (4) i を虚数単位とする。このとき、

$$z_1 = 1, z_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)z_n - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与えられる複素数の数列 $\{z_n\}$ を考える。このとき、

$$z_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)(z_n - \alpha) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる α の値を求めると、 $\alpha =$ ⑤ である。また、 $z_{2025} =$ ⑥ である。ただし、 ⑤ , ⑥ はともに数値で答えよ。

- (5) 1 個のさいころを 6 回投げる試行を行う。1 回目と 2 回目に出た目の和が 6 であったとき、1 から 6 の目がそれぞれ 1 回ずつ出る条件付き確率は ⑦ である。

(以上)

