

平成8(1996)年度

慶應義塾大学入学試験問題

医 学 部

数 学

		万位	千位	百位	十位	一位		
受験番号	医						氏名	

注 意

1. 受験番号と氏名は、問題用紙および解答用紙のそれぞれに必ず記入すること。
2. 受験番号は、所定欄のわく内に一字一字記入すること。
3. 解答は、必ず解答用紙の所定の欄に記入すること。
4. 問題用紙の余白を計算および下書きに用いてよろしい。
5. この冊子の総ページ数は8ページである。

以下の文章の空欄に適当な数、式、または記号 (${}_mC_n$, ${}_mP_n$, ! など) を入れて文章を完成しなさい。解答は解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。

M, N を自然数で、 $M \geq N$ とする。1 から M までの番号が重複なく 1 つずつ記された M 個の箱と、1 から N までの番号が重複なく 1 つずつ記された N 枚のカードがある。この M 個の箱に、この N 枚のカードを入れる。以下の問いに答えなさい。

- (1) どの箱にも零枚を含めて何枚入れても良いとする。このような入れ方の総数は M と N を用いて表すと、(ア) である。
- (2) どの箱にも、入れるとしても 1 枚しか入れないとする。このような入れ方の総数は M と N を用いて表すと、(イ) である。
- (3) k を整数で、 $0 \leq k \leq \frac{N}{2}$ とする。 M 個の箱のうち k 個にはカードをそれぞれ 2 枚ずつ入れ、残ったカードは残った箱に、どの箱にも入れるとしても 1 枚しか入れないとする。このような入れ方の総数は M と N と k を用いて表すと、(ウ) である。
- (4) $M=5, N=5$ の場合を考える。5 個の箱に 5 枚のカードを入れる。ただし、どの箱にも、入れるとしても 2 枚までのカードを入れるとする。このような入れ方の総数は (エ) である。

設問 (1), (2), (3) では、文章の空欄に適当な数、式、または記号を入れて、文章を完成しなさい。解答は解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。

(1) $n=0, 1, 2, 3, \dots$ にたいして、

$$J_n = \int_0^\pi t \sin^n t dt$$

とおく。 J_0 と J_1 の値はそれぞれ $J_0 = \boxed{\text{(ア)}}$, $J_1 = \boxed{\text{(イ)}}$ である。

(2) $n=2, 3, 4, \dots$ にたいして、 J_n と J_{n-2} との間には、次の漸化式がなりたつ。

$$J_n = \boxed{\text{(ウ)}} J_{n-2}$$

(3) $k=0, 1, 2, \dots$ にたいして、 J_{2k} と J_{2k+1} の値はそれぞれ $J_{2k} = \boxed{\text{(エ)}}$,

$J_{2k+1} = \boxed{\text{(オ)}}$ である。

(4) $k=1, 2, 3, \dots$ とする。 xyz 空間において、 xz 平面上で曲線

$$l_1: z = \sin^{2k+1} x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

と x 軸で囲まれた図形を S_1 とし、 yz 平面上で曲線

$$l_2: z = \sin^{2k} y \quad (0 \leq y \leq \pi)$$

と y 軸で囲まれた図形を S_2 とする。また、 t が $0 \leq t \leq \pi$ の範囲を変化するとき、2 点 $P_1(t, 0, \sin^{2k+1} t)$, $P_2(0, t, \sin^{2k} t)$ を結ぶ線分 P_1P_2 が動いて描く曲面を S_3 とする。図形 S_1 , S_2 , 曲面 S_3 , xy 平面の 4 つで囲まれる立体図形の概形を所定の欄に描き、またその体積 V を求めなさい。

[Ⅲ]

t を定数として xy 平面上の直線

$$C_t : y = (x+t)e^t$$

を考える。 t が $t > 0$ の範囲を変化するとき、 C_t が通る範囲を求め、その概形を所定の欄に図示しなさい。

設問(1)、(5)では、文章の空欄に適当な数、式、または記号を入れて文章を完成しなさい。解答は解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。

- (1) 変数 x, y と変数 X, Y の間に次の関係式がなりたつとする。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

a, b, c は定数で、 $b \neq 0$ とする。 x, y の多項式 $ax^2 + bxy + cy^2$ をこの関係式を用いて X, Y の 2 次の多項式 $AX^2 + BXY + CY^2$ に変形するとき、

$B = \sqrt{\text{ア}} \sin(2\alpha + k)$ となる k がある。ただし、 $\frac{\cos k}{\sin k} = \text{イ}$ である。 α として、たとえば $\alpha = -\frac{k}{2}$ ととると、 $B = 0$ となる。したがって、 XY の項のない $AX^2 + CY^2$ の形の多項式に変形できることがわかる。

- (2) 平面における位置ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ は、ともに零ベクトルでなく、互いに平行でないとする。位置ベクトル $\vec{p}$ を

$$\vec{p} = \cos \beta \vec{u} + \sin \beta \vec{v}$$

で定める。すべての実数 β にたいして

$$|\vec{p}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

が成り立つことを証明しなさい。

- (3) β が $0 \leq \beta \leq 2\pi$ の範囲を変化するとき、設問(2)における $\vec{p}$ の終点の軌跡は円またはだ円であることを証明しなさい。

- (4) xyz 空間の点 P の座標 $(x(\theta), y(\theta), z(\theta))$ を次のように定める。

$$x(\theta) = 5 \cos \theta + 2 \sin \theta + 1$$

$$y(\theta) = -\cos \theta - \sin \theta + 2$$

$$z(\theta) = \cos \theta - 2 \sin \theta - 1$$

θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲を変化するとき、点 P が描く曲線 C はある平面 π に含まれる円またはだ円であることを証明しなさい。

- (5) 設問(4)における C の中心の座標は ウ であり、平面 π の方程式は

$\text{エ} = 10$ である。また、 C の中心 Q から C 上の点 P への距離 QP の最大

値は オ であり、最小値は カ である。したがって、 C はだ円である。