

平成 9 (1997) 年度

慶應義塾大学入学試験問題

医 学 部

数 学

万位 千位 百位 十位 一位						氏 名	
受験番号	医						

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いたり、裏返したりしてはいけません。
2. 受験番号と氏名は、問題用紙および解答用紙のそれぞれ所定の欄に必ず記入しなさい。
3. この冊子の総ページ数は8ページです。問題はⅠ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳです。試験開始後直ちに確認して下さい。
4. 解答は、必ず解答用紙の所定の欄に記入すること。
5. 問題用紙の余白を計算および下書きに用いてよろしい。
6. 解答用紙の余白および裏には何も書いてはいけません。
7. 問題用紙は、試験終了後必ず持ち帰って下さい。

問(1)と、(2)では、空欄に適当な数を入れて文章を完成しなさい。解答は所定の解答欄の空欄に記入すること。

(1) 数列 $\{x_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ を, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$ と, 漸化式

$$x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

で定める。この数列の一般項はある定数 A , B (ただし, $A < B$ とする) を用いて

$$x_n = A^n + B^n$$

と表すことができる。 $A = \boxed{\text{(あ)}}$, $B = \boxed{\text{(い)}}$ である。

(2) 実数 x にたいして, $\langle x \rangle$ で x の小数部分を表す。つまり, $k \leq x < k+1$ を満たす整数 k をとり, $\langle x \rangle = x - k$ とする。たとえば,

$$\langle -2 \rangle = \boxed{\text{(う)}}, \quad \langle \frac{7}{2} \rangle = \boxed{\text{(え)}}, \quad \langle -\frac{5}{3} \rangle = \boxed{\text{(お)}}$$

(3) 二つの数列 $\{\langle A^n \rangle\}$, $\{\langle B^n \rangle\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ を考える。次の極限値を求めなさい。

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^{2n} \rangle, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^{2n+1} \rangle, \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \langle B^{2n} \rangle, \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \langle B^{2n+1} \rangle$$

[II]

xy 平面で原点 $O(0, 0)$ を中心とし、半径が 1 の円 C と、半径が $r = \frac{m}{n}$ で、中心が円 C の外側にあり、点 $P(1, 0)$ で円 C に接している円 S を考える。ただし、 m, n は互いに素な自然数とする。

最初、円 S の定点 Q が点 P と一致している状態から、円 S を円 C に C の外側から接したまま、かつ滑ることなく C のまわりを反時計回りに回転させてゆく。以下の問に答えなさい。

- (1) 円 C と円 S の接点が R のとき $\angle POR = \theta$, ($\theta \geq 0$) とおく。このときの点 Q の座標 (x, y) を r, θ を用いて表しなさい。
- (2) 点 Q が再び点 P に戻ってくるまでに、円 S は円 C のまわりを何回まわるか。
- (3) 点 Q が再び点 P に戻ってくるまでこの回転をさせるとき、点 Q の描く曲線の長さ l を求めなさい。

問(1),(2)では、空欄に適当な式を記入して文章を完成しなさい。解答は所定の解答欄の空欄に記入すること。

箱が1つと硬貨が2つある。これらの硬貨は、硬貨投げをすると表が出る確率がともに p である。従って裏が出る確率はともに $q = 1 - p$ である。ただし、 $0 < p < 1$ とする。

この箱にこれらの2個の硬貨が入っているときは、この箱は状態2にあると言い、1個の硬貨が入っているときは状態1にあると言い、硬貨が入っていないときは状態0にあると言うことにする。箱がこれらのどれかの状態にあるとき、中に硬貨があれば、あるだけ取り出して硬貨投げをする。投げた硬貨のうち裏が出た硬貨は取り除き、表が出た硬貨は箱に戻すという操作を行う。次の問に答えなさい。

- (1) $i = 2, 1, j = 2, 1, 0$ にたいして、箱が状態 i にある時この操作を一回行って箱が状態 j に移る確率を p_{ij} とする。次の値を p と $q = 1 - p$ を用いて表しなさい。(下図参照)

$$p_{22} = \boxed{\text{(あ)}}, \quad p_{11} = \boxed{\text{(い)}},$$

$$p_{20} = \boxed{\text{(う)}}, \quad p_{21} = \boxed{\text{(え)}}, \quad p_{10} = \boxed{\text{(お)}}$$

- (2) 箱に2個の硬貨がある状態からこの操作を繰り返し、箱の中に硬貨が無くなるまで続ける。 m 回の操作の後に箱が空になる確率を $P(m)$ で表す。 $(m = 1, 2, 3, \dots)$

$P(1), P(2), P(3)$ を p, q を用いて表しなさい。

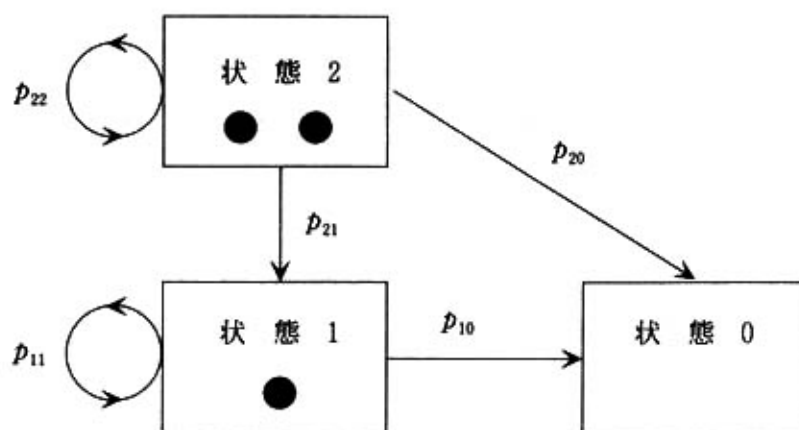
$$P(1) = \boxed{\text{(か)}}, \quad P(2) = \boxed{\text{(き)}}, \quad P(3) = \boxed{\text{(く)}}$$

- (3) また、一般の m にたいして $P(m)$ を p, q, m を用いて表しなさい。

- (4) 次の量 M を p, q を用いて表しなさい。

$$M = \sum_{m=1}^{\infty} mP(m)$$

- (5) この量 M はどのようなものを表すと考えられるか簡単に述べなさい。



次の文章の空欄に適当な数、式または記号を記入して文章を完成しなさい。解答は所定の解答欄の空欄に記入すること。

- (1) 0 でない数 l と、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で定義された恒等的には 0 でない連続関数 $f(x)$ との間に

$$lf(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos(x-t) dt$$

が成り立っている。このとき

$$lf(x) = A \cos x + B \sin x$$

が成り立つ。ただし、ここで A, B は定数で、 $f(t)$ を用いた定積分で表すと、

$$A = \boxed{\text{(あ)}}, \quad B = \boxed{\text{(い)}}$$

である。

- (2) A, B は次の連立一次方程式の解である。

$$l \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{(う)}} & \boxed{\text{(え)}} \\ \boxed{\text{(お)}} & \boxed{\text{(か)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

- (3) ところで、 X, Y を未知数とする連立一次方程式

$$k \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

が $X = 0, Y = 0$ 以外の解を持つと、 k, a, b, c, d の間には次の関係式が成り立たねばならない。

$$k^2 + \boxed{\text{(き)}} k + \boxed{\text{(く)}} = 0$$

- (4) ここで、問(3)の事実を考慮すると、問(2)の l は

$$l = l_1 = \boxed{\text{(け)}} \quad \text{または} \quad l = l_2 = \boxed{\text{(こ)}}$$

の 2 つの値しかとることができないことが分かる。ただし、 $l_1 < l_2$ とする。

- (5) 関数 $f(x)$ は c を任意定数として

$$l = l_1 \text{ のときは, } f(x) = c \boxed{\text{(さ)}},$$

$$l = l_2 \text{ のときは, } f(x) = c \boxed{\text{(し)}}$$

でなければならない。