

平成 11 (1999) 年度

慶應義塾大学入学試験問題

医 学 部

数 学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いたり、裏返したりしてはいけません。
2. 受験番号と氏名は、解答用紙のそれぞれ所定の欄に必ず記入してください。
3. この冊子の総ページ数は 8 ページです。問題は I, II, III です。問題は 2, 4, 6 ページに印刷されています。試験開始後直ちに確認してください。
4. 解答は、必ず解答用紙の所定の欄に記入してください。
5. 問題用紙の余白を計算および下書きに用いてください。
6. 解答用紙の余白および裏には何も書いてはいけません。
7. 問題用紙は、試験終了後必ず持ち帰ってください。

問(1)……(5)では、文章に埋める適当な数または式を解答用紙の所定の空欄に記しなさい。また、問(6)の解答は解答欄の所定の場所に記しなさい。

だ円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上の点 $P(a, b)$ におけるこのだ円の接線を l とする。ただし、 $b > 0$ とする。このだ円の 2 つの焦点を $F(f, 0)$, $F'(-f, 0)$ とする。ただし、 $f > 0$ とする。また、接線 l と直線 PF , PF' のなす角をそれぞれ θ , θ' とする。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ かつ、 $0 \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$ とする。以下のようにして $\theta = \theta'$ であることを証明しよう。

(1) f の値を求めると、 $f =$ (あ) である。

(2) 2 つのベクトル $\overrightarrow{PF}$, $\overrightarrow{PF'}$ の大きさを a のみの 1 次式で表すと、 $|\overrightarrow{PF}| =$ (い),
 $|\overrightarrow{PF'}| =$ (う) である。

(3) 接線 l の方程式は、(え) $x +$ (お) $y = 1$ である。ただし、(え) は a のみの一次式で、(お) は b のみの一次式で表しなさい。

(4) 接線 l 上の点 Q であって、ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ の x 成分が 1 であるものの座標を a, b で表すと、 $Q = Q(\text{ (か) }, \text{ (き) })$ である。

(5) ベクトルの内積 $n = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PF}$, $n' = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PF'}$ をそれぞれ a のみの 1 次式で表すと、 $n =$ (く), $n' =$ (け) である。

(6) $\cos \theta = \cos \theta'$ であることを証明することによって、 $\theta = \theta'$ であることを証明しなさい。

[II]

問(1), (2)では文章の空欄に埋める適当な数または式を解答用紙の所定の空欄に記しなさい。残りの部分の解答は解答欄の所定の場所に記しなさい。

関数 $F(x)$ が次の性質 (i), (ii), (iii) を満たしている。

(i) $F(x)$ の定義域は実数全体で, その値は常に正である。

(ii) 任意の実数 x_1 と任意の実数 x_2 にたいし, $F(x_1+x_2) = 2F(x_1)F(x_2)$ が成り立つ。

(iii) 関数 $G(x)$ を $G(x) = \log F(x)$ で定義すると, $G(x)$ は $x=3$ で微分可能で $G'(3) = G(1-\log 2)$ である。

以下の問に答えなさい。

(1) $F(0) = F(0+0)$ に注意して $F(0)$ の値を求めると, $F(0) = \boxed{\text{(あ)}}$ である。

(2) 一般に関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとは, $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \boxed{\text{(い)}}$ が存在すること(右辺の極限值が存在すること)であると定義される。

(3) 任意の実数 a に対して $G(x)$ は $x=a$ で微分可能であることを証明しなさい。

(4) $G(x)$ を求めなさい。

(5) $F(x)$ を求めなさい。

[Ⅲ]

a, b, c を実数の定数とする。 $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位として、複素数 z を未知数とする方程式

$$F(z) = z^3 + aiz^2 + bz + ci = 0$$

の解のいくつかの性質に関して次の問に答えなさい。

- (1) $z = \alpha$ が $F(z) = 0$ の解ならば、 $z = -\bar{\alpha}$ も $F(z) = 0$ の解であることを証明しなさい。ただし、 $\bar{\alpha}$ は α の共役複素数とする。 $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ は用いてよい。
- (2) $z = r$ が $F(z) = 0$ の 1 つの解で、 r が実数であるとする。 $c \neq 0$ とするとき、 $z = -r, -ai$ も $F(z) = 0$ の解であることを証明しなさい。
- (3) 実数を係数とする 3 次方程式は、少なくとも 1 つ実数解を持つことを用いて、方程式 $F(z) = 0$ は少なくとも 1 つの純虚数の解を持つことを証明しなさい。
- (4) 問 (3) を用いて、方程式 $z^3 + iz^2 + z + 10i = 0$ の 3 つの解を求めなさい。