

平成 12 (2000) 年度

慶應義塾大学入学試験問題

医 学 部

数 学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いたり、裏返したりしてはいけません。
2. 受験番号と氏名は、解答用紙のそれぞれ所定の欄に必ず記入してください。
3. この冊子の総ページ数は 8 ページです。問題は I, II, III, IV です。問題は 2, 4, 5, 6 ページに印刷されています。試験開始後直ちに確認してください。
4. 解答は、必ず解答用紙の所定の欄に記入してください。
5. 問題用紙の余白を計算および下書きに用いてください。
6. 解答用紙の余白および裏には何も書いてはいけません。
7. 問題用紙は、試験終了後必ず持ち帰ってください。

以下の文章の空欄に適当な数または式を入れて文章を完成しなさい。解答は解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。

放物線 $y = x^2$ を C , C 上の点 $P(t, t^2)$ (ただし, $t < 0$) における法線と C の交点で P と異なるものを Q , 線分 PQ の中点を R とする。

(1) R の座標を t の関数として表すと, x 座標は (あ), y 座標は (い) である。

(2) t が負の実数を動くとき R の描く曲線 D の方程式を $y = f(x)$, $x > 0$, とすると,

$f(x) =$ (う) となる。

(3) D と直線 $y = \frac{5}{4}$ の交点の x 座標を a, b (ただし, $a < b$) とすると, $a =$ (え),

$b =$ (お) となる。

(4) D と直線 $y = \frac{5}{4}$ で囲まれた部分の面積は (か) である。

以下の文章の空欄に適当な数または式を入れて文章を完成しなさい。解答は解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。

正 7 角形の各頂点に 0 から 6 までの数が右まわりにふってある。 $x_0 = 0$ とし、サイコロをふって出た目の数だけ x_0 から右まわりにすすめた位置を x_1 とし、再びサイコロをふって出た目の数だけ x_1 から右まわりにすすめた位置を x_2 とする。さらに、これを繰り返して $x_3, x_4, \dots$ を作っていく。

頂点の集合 $\{1, 2\}$ を A , $\{2, 3\}$ を B , $\{x_0, x_1, \dots, x_i\}$ を X_i とおく。

- (1) $v \in \{3, 4, 5, 6\}$ とすると、 $x_1 = v$ かつ $x_2 = 1$ となる確率は v によらず一定で、その値は (あ) である。

以下、 n を自然数とする。

- (2) $X_n \cap A \neq \emptyset$ かつ $X_{n-1} \cap A = \emptyset$ となる確率 p_n は (い) である。また、このような n の期待値 $\sum_{n=1}^{\infty} np_n$ は (う) である。
- (3) $X_n \cap A \neq \emptyset$, $X_{n-1} \cap A = \emptyset$ かつ $X_{n-1} \cap B \neq \emptyset$ となる確率は (え) である。
- (4) $X_i \cap A \neq \emptyset$ かつ $X_i \cap B \neq \emptyset$ を満たす最小の i が n となる確率は (お) である。

設問(1),(2)では文章の空欄に適当な数または式を入れて文章を完成しなさい。解答は解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。設問(3)の解答は解答欄の所定の場所に記入しなさい。

2次元の列ベクトル(2行1列の行列) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ に対し, $\ell(\boldsymbol{x}) = \sqrt{s^2 + t^2}$ と定義し, $S = \{\boldsymbol{x} \mid \ell(\boldsymbol{x}) = 1\}$ とおく。

また, 2行2列の行列 A に対し, $\boldsymbol{x}$ が S を動いたときの $\ell(A\boldsymbol{x})$ の最大値を $m(A)$ と定義する。

(1) $0 < a < b$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in S$, $m(A) = \ell(A\boldsymbol{x})$ ならば, $s^2 = \boxed{\text{(あ)}}$, $t^2 = \boxed{\text{(い)}}$ で, $m(A) = \boxed{\text{(う)}}$ である。

(2) $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in S$, $m(A) = \ell(A\boldsymbol{x})$ ならば, $s^2 = \boxed{\text{(え)}}$, $t^2 = \boxed{\text{(お)}}$ で, $m(A) = \boxed{\text{(か)}}$ である。

(3) 「 $a, b, c \geq 0$, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ならば $m(A^2) = m(A)^2$ が成り立つ」という命題は正しいか? 正しいければ証明し, 正しくないならば成り立たない例を1つ示し, 成り立たない理由を述べなさい。

実数 x に対し

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & x < \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ \frac{2x-1}{x} & x \geq \frac{1}{2} \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義し、また、 $f^1(x) = f(x)$ 、自然数 k に対し、 $f^{k+1}(x) = f^k(f(x))$ と定義する。

- (1) $f^2(x) = x$ を満たす実数 x をすべて決定しなさい。
- (2) $f^k(x) = 0$ となる自然数 k が存在すれば x は有理数であることを証明しなさい。
- (3) p, q, n が自然数で、 $0 < p < q \leq n$ を満たしていれば $f^k\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ となる自然数 k が存在することを、 n に関する数学的帰納法により証明しなさい。