〔I〕

(1) (あ) $\sqrt{1-d^2}$　(い) ℓd

(う) $\dfrac{d}{\ell}\sqrt{\dfrac{1+\ell^2}{1-d^2}}$　(え) -1

(2) (お) $\sqrt{r^2-1}$　(か) $\dfrac{r^2}{r^2-1}$

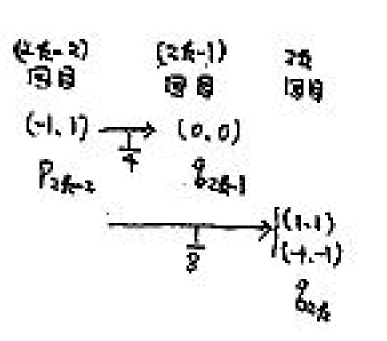
〔II〕

(1) (あ) $\dfrac{3}{4}$

(2) (い) $\dfrac{3}{16}$　(う) $\dfrac{3}{8}$　(え) $\dfrac{1}{8}$

(3) (お) $\dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{16}\right)^{m-1}$　(か) $\left(\dfrac{3}{16}\right)^{m}$

(4) $(2k-1)$回目，$2k$回目に2個が同時に同じ点を占めて取り除かれる確率をそれぞれ q_{2k-1}, q_{2k} とすると



$$\begin{cases} q_{2k-1} = \dfrac{1}{4}P_{2k-2} \\ q_{2k} = \dfrac{1}{8}P_{2k-2} \end{cases}$$

求める確率を Q_n とすると

i) $n=2m$（＝偶数）のとき

$$Q_n = Q_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} q_k = \sum_{k=1}^{m}(q_{2k-1}+q_{2k})$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4}P_{2k-2}+\frac{1}{8}P_{2k-2}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{3}{8}P_{2k-2}$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{3}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$$
$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{16}\right)^m}{1-\frac{3}{16}} = \frac{6}{13}\left\{1-\left(\frac{3}{16}\right)^m\right\}$$

$m=\dfrac{n}{2}$ を代入して　$Q_n = \dfrac{6}{13}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$

ii) $n=2m+1$（＝奇数）のとき

$$Q_n = Q_{2m+1} = Q_{2m} + q_{2m+1}$$

i)の途中の式を利用して　$Q_{2m} = \dfrac{6}{13}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^m\right\}$

また，$q_{2m+1} = \dfrac{1}{4}P_{2m} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{16}\right)^m$　も代入して

$$Q_n = \frac{6}{13}\left\{1-\left(\frac{3}{16}\right)^m\right\} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{16}\right)^m$$
$$= \frac{6}{13} - \frac{11}{52}\left(\frac{3}{16}\right)^m$$

$m=\dfrac{n-1}{2}$ を代入して

$$Q_n = \frac{6}{13} - \frac{11}{52}\left(\frac{3}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

以上 i), ii) より

$$Q_n = \begin{cases} \dfrac{6}{13}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & (n\text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{6}{13} - \dfrac{11}{52}\left(\dfrac{3}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}} & (n\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$ ……(答)

〔III〕

(1) (あ) $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　(い) $\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

(2) (う) -1, $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(3) (え) -1, $\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$

(4) $\begin{cases} x = |\sin 2\theta|\cos\theta = x(\theta) & \cdots\cdots ① \\ y = |\sin 2\theta|\sin\theta = y(\theta) & \cdots\cdots ② \end{cases}$　とすると

$x(-\theta)=x(\theta)$，$y(-\theta)=-y(\theta)$ だからグラフは x軸に関して対称．

$x(\pi-\theta)=|\sin 2(\pi-\theta)|\cos(\pi-\theta) = -|\sin 2\theta|\cos\theta = -x(\theta)$

$y(\pi-\theta)=|\sin 2(\pi-\theta)|\sin(\pi-\theta) = |\sin 2\theta|\sin\theta = y(\theta)$

よってグラフは y軸に関して対称．

$x\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\left|\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = |\sin 2\theta|\sin\theta = y(\theta)$

$y\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\left|\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = |\sin 2\theta|\cos\theta = x(\theta)$

よってグラフは $y=x$ に関して対称．

従って，(1)の結果を使って，

xが最小値をとるのは $\left(-\frac{4\sqrt{3}}{9}, \pm\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$，

yが最大値をとるのは $\left(\pm\frac{2\sqrt{6}}{9}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$

yが最小値をとるのは $\left(\pm\frac{2\sqrt{6}}{9}, -\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$，

次に，この曲線と $y=-x+\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ との交点を求める。

明らかに $\frac{3+\sqrt{3}}{4} > \frac{4\sqrt{3}}{9}$ だから交点は第1象限にある。よって $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ で考える。このとき $|\sin 2\theta| = \sin 2\theta$ だから $y=-x+\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ に①,②を代入して

$$\sin 2\theta\sin\theta = -\sin 2\theta\cos\theta + \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$
$$2\sin^2\theta\cos\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$
$$\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta) = \frac{3+\sqrt{3}}{8}$$

$\sin\theta+\cos\theta=\alpha$，$\sin\theta\cos\theta=\beta$ とおくと　$\alpha\beta=\dfrac{3+\sqrt{3}}{8}$ ……③

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より $(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta=1$

∴ $\alpha^2-2\beta=1$ ……④，　③,④を連立して解く

④より $\beta=\dfrac{\alpha^2-1}{2}$ を③に代入して $\alpha\cdot\dfrac{\alpha^2-1}{2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{8}$

∴ $4\alpha^3-4\alpha-(3+\sqrt{3})=0$

$(2\alpha-\sqrt{3}-1)\{2\alpha^2+(\sqrt{3}+1)\alpha+\sqrt{3}\}=0$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ だから $\alpha>0$　∴ $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

③に代入して　$\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\sin\theta$, $\cos\theta$ は $t^2-\alpha t+\beta=0$　即ち $t^2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{4}=0$ の2つの解であるから，$4t^2-2(\sqrt{3}+1)t+\sqrt{3}=0$ を解いて

$(2t-1)(2t-\sqrt{3})=0$ より $t=\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即ち $(\sin\theta, \cos\theta)=\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ または $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より　$\theta=\frac{\pi}{6}$ または $\frac{\pi}{3}$

①,②に代入して交点は $(x, y)=\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ または $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$

次に曲線の概形を求める。$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ で考える。

$x=2\sin\theta\cos^2\theta$，$y=2\sin^2\theta\cos\theta$ より

$\dfrac{dx}{d\theta}=2\{\cos\theta\cdot\cos^2\theta+\sin\theta\cdot2\cos\theta(-\sin\theta)\}=2\cos\theta(3\cos^2\theta-2)$

$\dfrac{dy}{d\theta}=2\{2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta+\sin^2\theta(-\sin\theta)\}=2\sin\theta(3\cos^2\theta-1)$

∴ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\Big/\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\sin\theta(3\cos^2\theta-1)}{\cos\theta(3\cos^2\theta-2)}$

θ	0	……	θ_1	……	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dx}{d\theta}$	+	+	0	−	−
$\frac{dy}{d\theta}$	0	+	+	+	+
$\frac{dy}{dx}$	0	+	╳	−	−
x	0	↗	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
y	0	↗	$\frac{2\sqrt{6}}{9}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ では $\frac{dy}{d\theta}\geqq0$

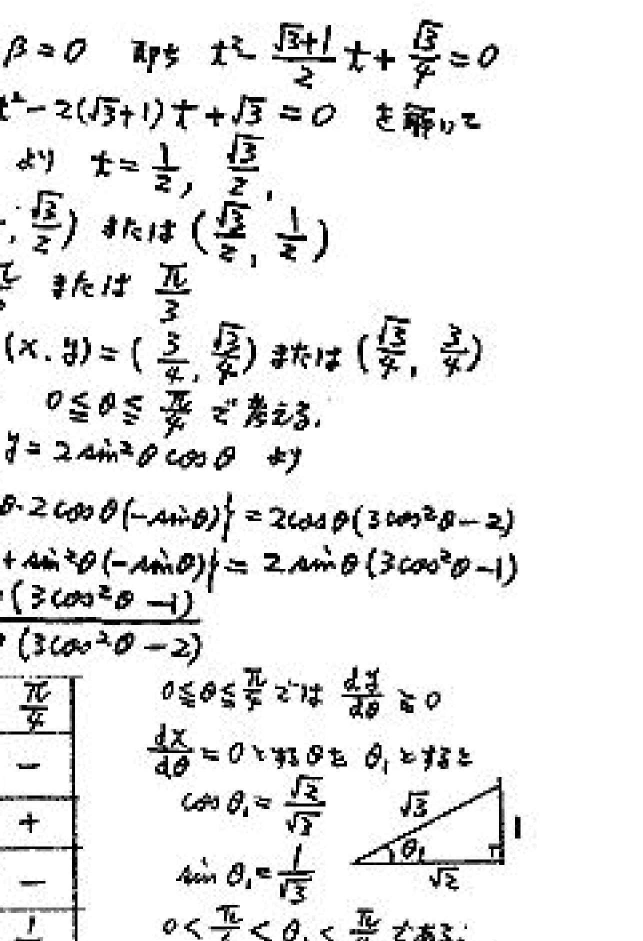
$\frac{dx}{d\theta}=0$ とする θ を θ_1 とすると

$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\sin\theta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$0<\frac{\pi}{6}<\theta_1<\frac{\pi}{4}$ である。

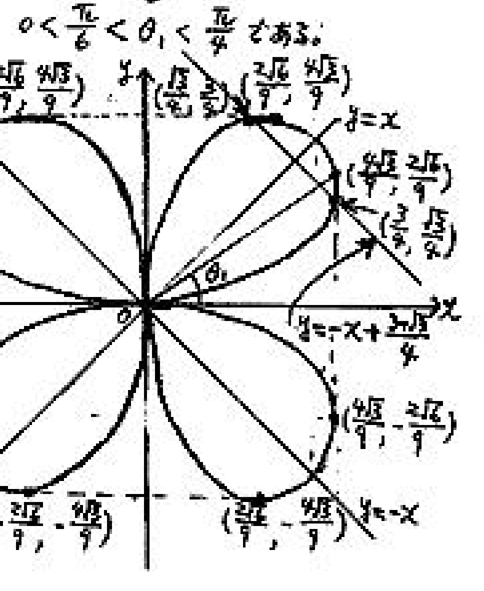
曲線は x軸，y軸，$y=x$ に関して対称であることからグラフの概形が得られる。



(5) 図形は $y=x$ に関して対称である。

$y=-x+\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ と $y=x$ との交点は $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{8}, \frac{3+\sqrt{3}}{8}\right)$

求める面積を S とすると



$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3+\sqrt{3}}{8}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{3+\sqrt{3}}{8}\right) - \int_0^{\frac{3}{4}} y\,dx$$
$$= \frac{3+3\sqrt{3}}{32} - \int_0^{\frac{3}{4}} y\,dx \cdots\cdots ⑤$$

ここで　$x=\sin 2\theta\cos\theta$ とおくと $dx=2\cos\theta(3\cos^2\theta-2)d\theta$

x	$0 \to \frac{3}{4}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{6}$

よって
$$\int_0^{\frac{3}{4}} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2\theta\sin\theta\cdot2\cos\theta(3\cos^2\theta-2)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2\theta\left\{\frac{3(1+\cos 2\theta)}{2}-2\right\}d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\cdot\frac{-1+3\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (-1+3\cos 2\theta+\cos 4\theta-3\cos 4\theta\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left\{-1+3\cos 2\theta+\cos 4\theta-\frac{3}{2}(\cos 6\theta+\cos 2\theta)\right\}d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\left[-\theta+\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}+\frac{\sin 4\theta}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 6\theta}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

⑤に代入して　$\dfrac{S}{2} = \dfrac{3+3\sqrt{3}}{32} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$

∴ $S = \dfrac{3-\sqrt{3}}{16} + \dfrac{\pi}{12}$ ……(答)

〔IV〕

(1) (あ) $\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(\ell-x)^2+\ell^2}$

(い) $\dfrac{a}{a+\ell}$

(2) (う) $\dfrac{\sin\theta\cos(\alpha+\theta)}{\cos\alpha\cos(\alpha-\theta)}$

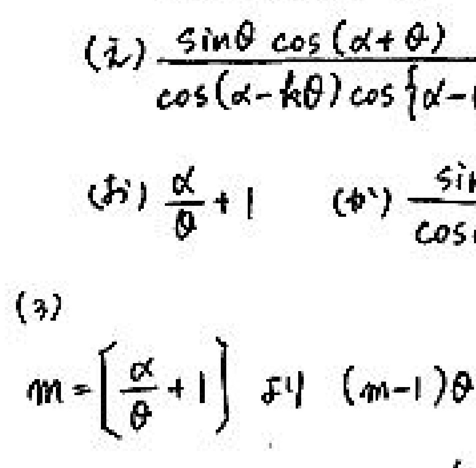
(え) $\dfrac{\sin\theta\cos(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha-k\theta)\cos\{\alpha-(k+1)\theta\}}$

(お) $\dfrac{\alpha}{\theta}+1$　(か) $\dfrac{\sin n\theta\cos(\alpha+\theta)}{\cos\alpha\cos(\alpha-n\theta)}$

(3)

$m=\left[\dfrac{\alpha}{\theta}+1\right]$ より $(m-1)\theta\leqq\alpha<m\theta$

$\alpha=(m-1)\theta$, $m\theta$ のときの P'_m をそれぞれ $P'(m, m-1)$, $P'(m, m)$ とすると，P'_{m-1} は図の太線部を動く。



$\angle PP'(m,m)O=\dfrac{\pi}{2}$ なので右図から PP'_{m-1} が最大となるのは，$\alpha=(m-1)\theta$ のときである。

$\left(\begin{array}{l} \because P'(m,m)P \text{と} PP'_m \text{のなす角を} x\left(0<x\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\right) \\ \text{とすると} \\ PP'_m=\dfrac{PP'(m,m)}{\cos x} \text{となるため} x \text{の増加関数} \end{array}\right)$

よって $n=m$，$\alpha=(m-1)\theta$ を代入して

$$\mathrm{Max}\sum_{k=0}^{m-1}P_kP_{k+1} = PP'(m,m-1)$$
$$= \frac{\sin m\theta\cos m\theta}{\cos(m-1)\theta\cos\theta}$$ (答)

(4) (き) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

〔I〕

(1) (あ) $\sqrt{1-d^2}$　(い) ℓd

(う) $\dfrac{d}{\ell}\sqrt{\dfrac{1+\ell^2}{1-d^2}}$　(え) -1

(2) (お) $\sqrt{r^2-1}$　(か) $\dfrac{r^2}{r^2-1}$

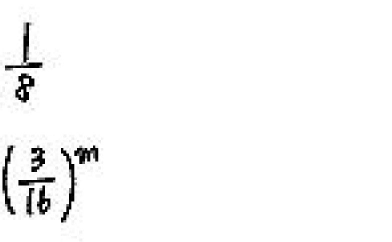
〔II〕

(1) (あ) $\dfrac{3}{4}$

(2) (い) $\dfrac{3}{16}$　(う) $\dfrac{3}{8}$　(え) $\dfrac{1}{8}$

(3) (お) $\dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{16}\right)^{m-1}$　(か) $\left(\dfrac{3}{16}\right)^{m}$

(4) $(2k-1)$回目，$2k$回目に2個が同時に同じ点を占めて取り除かれる確率をそれぞれ q_{2k-1}，q_{2k} とすると



$$\begin{cases} q_{2k-1} = \dfrac{1}{4}P_{2k-2} \\ q_{2k} = \dfrac{1}{8}P_{2k-2} \end{cases}$$

求める確率を Q_n とすると

(i) $n=2m$ (=偶数) のとき

$$Q_n = Q_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} q_k = \sum_{k=1}^{m}(q_{2k-1}+q_{2k})$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4}P_{2k-2}+\frac{1}{8}P_{2k-2}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{3}{8}P_{2k-2}$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{3}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$$
$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{16}\right)^m}{1-\frac{3}{16}} = \frac{6}{13}\left\{1-\left(\frac{3}{16}\right)^m\right\}$$

$m=\dfrac{n}{2}$ を代入して　$Q_n = \dfrac{6}{13}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$

(ii) $n=2m+1$ (=奇数) のとき

$$Q_n = Q_{2m+1} = Q_{2m} + q_{2m+1}$$

(i)の途中の式を利用して　$Q_{2m} = \dfrac{6}{13}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^m\right\}$

また，$q_{2m+1} = \dfrac{1}{4}P_{2m} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{16}\right)^m$　も代入して

$$Q_n = \frac{6}{13}\left\{1-\left(\frac{3}{16}\right)^m\right\} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{16}\right)^m$$
$$= \frac{6}{13} - \frac{11}{52}\left(\frac{3}{16}\right)^m$$

$m=\dfrac{n-1}{2}$ を代入して

$$Q_n = \frac{6}{13} - \frac{11}{52}\left(\frac{3}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

以上 (i),(ii) より

$$Q_n = \begin{cases} \dfrac{6}{13}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & (n\text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{6}{13} - \dfrac{11}{52}\left(\dfrac{3}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}} & (n\text{が奇数のとき}) \end{cases} \quad \cdots\cdots (答)$$

〔III〕

(1) (あ) $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　(い) $\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

(2) (う) -1, $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(3) (え) -1, $\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$

(4) $\begin{cases} x = |\sin 2\theta|\cos\theta = x(\theta) & \cdots\cdots ① \\ y = |\sin 2\theta|\sin\theta = y(\theta) & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とすると

$x(-\theta)=x(\theta)$，$y(-\theta)=-y(\theta)$ だからグラフは x軸に関して対称．

$x(\pi-\theta) = |\sin 2(\pi-\theta)|\cos(\pi-\theta) = -|\sin 2\theta|\cos\theta = -x(\theta)$

$y(\pi-\theta) = |\sin 2(\pi-\theta)|\sin(\pi-\theta) = |\sin 2\theta|\sin\theta = y(\theta)$

よってグラフは y軸に関して対称．

$x\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \left|\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = |\sin 2\theta|\sin\theta = y(\theta)$

$y\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \left|\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = |\sin 2\theta|\cos\theta = x(\theta)$

よってグラフは $y=x$ に関して対称。

従って，(1)の結果を使って，

xが最小値をとるのは $\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{9},\ \pm\dfrac{2\sqrt{6}}{9}\right)$．

yが最大値をとるのは $\left(\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{9},\ \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\right)$

yが最小値をとるのは $\left(\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{9},\ -\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\right)$．

次に，この曲線と $y=-x+\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ との交点を求める。

明らかに $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4} > \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ だから交点は第1象限にある。よって $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で考える。このとき $|\sin 2\theta| = \sin 2\theta$ だから $y=-x+\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ に①,②を代入して

$$\sin 2\theta\sin\theta = -\sin 2\theta\cos\theta + \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$
$$2\sin^2\theta\cos\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$
$$\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta) = \frac{3+\sqrt{3}}{8}$$

$\sin\theta+\cos\theta = \alpha$，$\sin\theta\cos\theta = \beta$ とおくと　$\alpha\beta = \dfrac{3+\sqrt{3}}{8}$ ……③

$\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$ より $(\sin\theta+\cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cos\theta = 1$

$\therefore\ \alpha^2 - 2\beta = 1$ ……④，　③④を連立して解く

④より $\beta = \dfrac{\alpha^2-1}{2}$ を③に代入して　$\alpha\cdot\dfrac{\alpha^2-1}{2} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{8}$

$\therefore\ 4\alpha^3 - 4\alpha - (3+\sqrt{3}) = 0$

$(2\alpha-\sqrt{3}-1)\{2\alpha^2+(\sqrt{3}+1)\alpha+\sqrt{3}\} = 0$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ だから $\alpha>0$　$\therefore\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

③に代入して　$\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\sin\theta$, $\cos\theta$ は $t^2-\alpha t+\beta=0$　即ち $t^2 - \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}t + \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 0$

の2つの解であるから，$4t^2 - 2(\sqrt{3}+1)t + \sqrt{3} = 0$ を解いて

$(2t-1)(2t-\sqrt{3}) = 0$ より $t = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

即ち $(\sin\theta, \cos\theta) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ または $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ または $\dfrac{\pi}{3}$

①,②に代入して交点は $(x, y) = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ または $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$

次に曲線の概形を求める。$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ で考える．

$x = 2\sin\theta\cos^2\theta$，$y = 2\sin^2\theta\cos\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\{\cos\theta\cdot\cos^2\theta + \sin\theta\cdot 2\cos\theta(-\sin\theta)\} = 2\cos\theta(3\cos^2\theta-2)$$
$$\frac{dy}{d\theta} = 2\{2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta + \sin^2\theta(-\sin\theta)\} = 2\sin\theta(3\cos^2\theta-1)$$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \frac{\sin\theta(3\cos^2\theta-1)}{\cos\theta(3\cos^2\theta-2)}$$

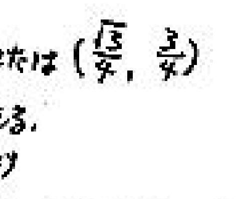
θ	0	……	θ_1	……	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dx}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\frac{dy}{d\theta}$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{dy}{dx}$	0	$+$	╳	$-$	$-$
x	0	↗	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
y	0	↗	$\frac{2\sqrt{6}}{9}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ では $\dfrac{dy}{d\theta}\geqq 0$

$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ となる θ を θ_1 とすると

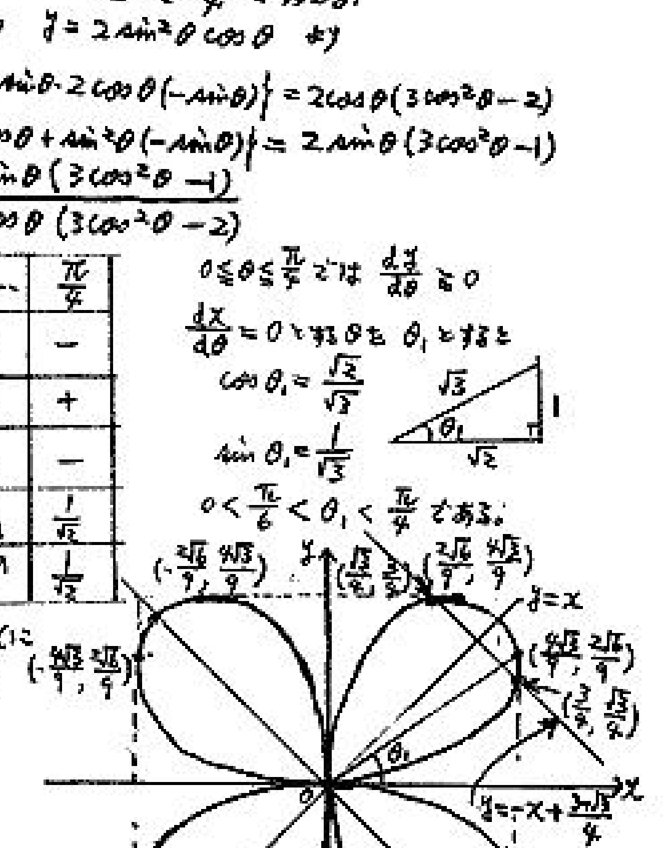
$\cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\sin\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



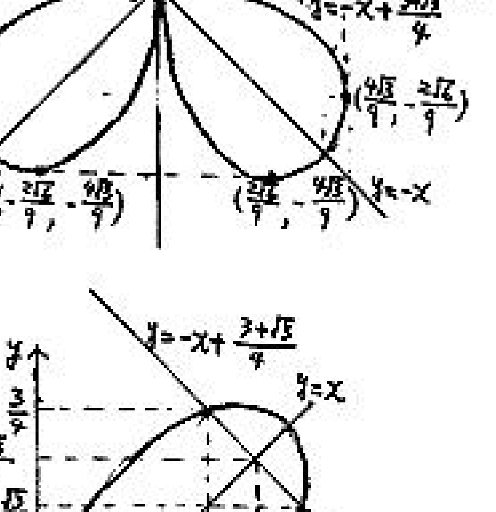
$0<\dfrac{\pi}{6}<\theta_1<\dfrac{\pi}{4}$ である。

曲線は x軸，y軸，$y=x$ に関して対称であることからグラフの概形が得られる。



(5) 図形は $y=x$ に関して対称である。

$y=-x+\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ と $y=x$ との交点は $\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{8}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{8}\right)$



求める面積を S とすると

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3+\sqrt{3}}{8}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{3+\sqrt{3}}{8}\right) - \int_0^{\frac{3}{4}} y\,dx$$
$$= \frac{3+3\sqrt{3}}{32} - \int_0^{\frac{3}{4}} y\,dx \quad\cdots\cdots ⑤$$

ここで　$x=\sin 2\theta\cos\theta$ とおくと $dx = 2\cos\theta(3\cos^2\theta-2)\,d\theta$

x	$0 \longrightarrow \frac{3}{4}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

よって
$$\int_0^{\frac{3}{4}} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2\theta\sin\theta\cdot 2\cos\theta(3\cos^2\theta-2)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2\theta\left\{\frac{3(1+\cos 2\theta)}{2} - 2\right\}d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\cdot\frac{-1+3\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(-1+3\cos 2\theta+\cos 4\theta-3\cos 4\theta\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{-1+3\cos 2\theta+\cos 4\theta-\frac{3}{2}(\cos 6\theta+\cos 2\theta)\right\}d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\left[-\theta+\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}+\frac{\sin 4\theta}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 6\theta}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

⑤に代入して　$\dfrac{S}{2} = \dfrac{3+3\sqrt{3}}{32} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\therefore\ S = \dfrac{3-\sqrt{3}}{16} + \dfrac{\pi}{12}$　……(答)

〔IV〕

(1) (あ) $\sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(\ell-x)^2+b^2}$

(い) $\dfrac{a}{a+b}$

(2) (う) $\dfrac{\sin\theta\cos(\alpha+\theta)}{\cos\alpha\cos(\alpha-\theta)}$

(え) $\dfrac{\sin\theta\cos(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha-k\theta)\cos\{\alpha-(k+1)\theta\}}$

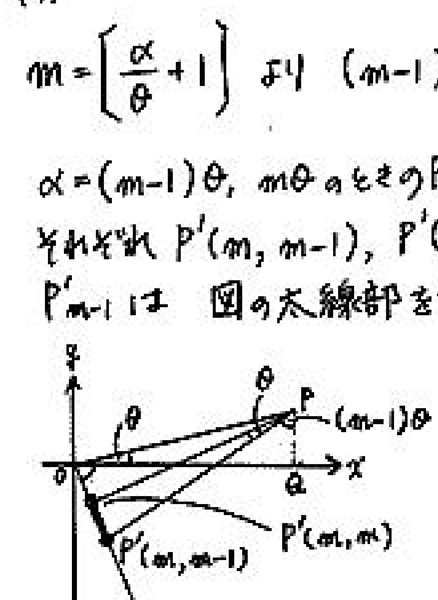
(お) $\dfrac{\alpha}{\theta}+1$　(か) $\dfrac{\sin n\theta\cos(\alpha+\theta)}{\cos\alpha\cos(\alpha-n\theta)}$

(3)

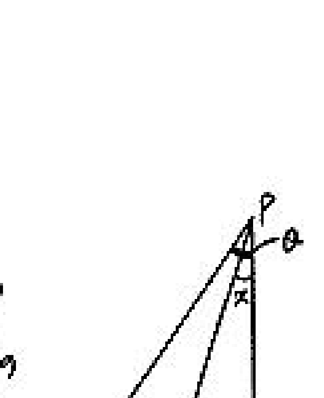
$m = \left[\dfrac{\alpha}{\theta}+1\right]$ より $(m-1)\theta\leqq\alpha<m\theta$

$\alpha=(m-1)\theta$, $m\theta$ のときの P'_m をそれぞれ $P'(m, m-1)$, $P'(m, m)$ とすると，

P'_{m-1} は図の太線部を動く。



$\angle PP'(m,m)O = \dfrac{\pi}{2}$ なので右図から PP'_{m-1} が最大となるのは，$\alpha=(m-1)\theta$ のときである。



$\left(\begin{array}{l}\because\ P'(m,m)P \text{ と } PP'_m \text{ のなす角を } x\ \left(0<x\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \text{とすると} \\ PP'_m = \dfrac{PP'(m,m)}{\cos x} \text{ となるため } x \text{ の増加関数}\end{array}\right)$

よって $n=m$，$\alpha=(m-1)\theta$ を代入して

$$\mathrm{Max}\sum_{k=0}^{m-1}P_kP_{k+1} = PP'(m, m-1)$$
$$= \frac{\sin m\theta\cos m\theta}{\cos(m-1)\theta\cos\theta} \quad (答)$$

(4) (き) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

[I]

(1) (あ) $\sqrt{1-d^2}$　(い) bd

(う) $\dfrac{d}{b}\sqrt{\dfrac{1+b^2}{1-d^2}}$　(え) -1

(2) (お) $\sqrt{r^2-1}$　(か) $\dfrac{r^2}{r^2-1}$

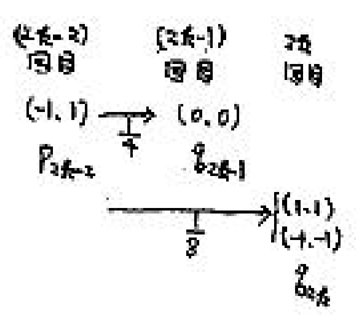
[II]

(1) (あ) $\dfrac{3}{4}$

(2) (い) $\dfrac{3}{16}$　(う) $\dfrac{3}{8}$　(え) $\dfrac{1}{8}$

(3) (お) $\dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{16}\right)^{m-1}$　(か) $\left(\dfrac{3}{16}\right)^{m}$

(4) $(2k-1)$回目, $2k$回目に2個が同時に同じ点を占めて取り除かれる確率をそれぞれ g_{2k-1}, g_{2k} とすると



$$\begin{cases} g_{2k-1} = \dfrac{1}{4}P_{2k-2} \\ g_{2k} = \dfrac{1}{8}P_{2k-2} \end{cases}$$

求める確率を Q_n とすると

i) $n=2m$ (=偶数) のとき

$$Q_n = Q_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} g_k = \sum_{k=1}^{m}(g_{2k-1}+g_{2k})$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4}P_{2k-2}+\frac{1}{8}P_{2k-2}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{3}{8}P_{2k-2}$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{3}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$$
$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{16}\right)^m}{1-\frac{3}{16}} = \frac{6}{13}\left\{1-\left(\frac{3}{16}\right)^m\right\}$$

$m=\dfrac{n}{2}$ を代入して　$Q_n = \dfrac{6}{13}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$

ii) $n=2m+1$ (=奇数) のとき

$$Q_n = Q_{2m+1} = Q_{2m} + g_{2m+1}$$

i) の途中の式を利用して　$Q_{2m} = \dfrac{6}{13}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^m\right\}$

また, $g_{2m+1} = \dfrac{1}{4}P_{2m} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{16}\right)^m$　も代入して

$$Q_n = \frac{6}{13}\left\{1-\left(\frac{3}{16}\right)^m\right\} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{16}\right)^m$$
$$= \frac{6}{13} - \frac{11}{52}\left(\frac{3}{16}\right)^m$$

$m=\dfrac{n-1}{2}$ を代入して

$$Q_n = \frac{6}{13} - \frac{11}{52}\left(\frac{3}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

以上 i), ii) より

$$Q_n = \begin{cases} \dfrac{6}{13}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & (n\text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{6}{13} - \dfrac{11}{52}\left(\dfrac{3}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}} & (n\text{が奇数のとき}) \end{cases} \quad \cdots\cdots(答)$$

[III]

(1) (あ) $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　(い) $\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

(2) (う) -1, $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(3) (え) -1, $\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$

(4) $\begin{cases} x = |\sin 2\theta|\cos\theta = x(\theta) & \cdots\cdots ① \\ y = |\sin 2\theta|\sin\theta = y(\theta) & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とすると

$x(-\theta)=x(\theta)$, $y(-\theta)=-y(\theta)$ だからグラフは x 軸に関して対称.

$x(\pi-\theta) = |\sin 2(\pi-\theta)|\cos(\pi-\theta) = -|\sin 2\theta|\cos\theta = -x(\theta)$

$y(\pi-\theta) = |\sin 2(\pi-\theta)|\sin(\pi-\theta) = |\sin 2\theta|\sin\theta = y(\theta)$

よってグラフは y 軸に関して対称.

$x\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \left|\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = |\sin 2\theta|\sin\theta = y(\theta)$

$y\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \left|\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = |\sin 2\theta|\cos\theta = x(\theta)$

よってグラフは $y=x$ に関して対称.

従って, (1) の結果を使って,

x が最小値をとるのは $\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}, \pm\dfrac{2\sqrt{6}}{9}\right)$,

y が最大値をとるのは $\left(\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{9}, \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\right)$

y が最小値をとるのは $\left(\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{9}, -\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\right)$.

次に, この曲線と $y=-x+\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ との交点を求める。

明らかに $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4} > \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ だから交点は第1象限にある。よって $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で考える。このとき $|\sin 2\theta| = \sin 2\theta$ だから $y=-x+\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ に ①, ② を代入して

$$\sin 2\theta\sin\theta = -\sin 2\theta\cos\theta + \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$
$$2\sin^2\theta\cos\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$
$$\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta) = \frac{3+\sqrt{3}}{8}$$

$\sin\theta+\cos\theta=\alpha$, $\sin\theta\cos\theta=\beta$ とおくと　$\alpha\beta = \dfrac{3+\sqrt{3}}{8}$ $\cdots\cdots ③$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より　$(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta=1$

$\therefore\ \alpha^2-2\beta=1$ $\cdots\cdots ④$,　③④ を連立して解く.

④ より $\beta=\dfrac{\alpha^2-1}{2}$ を ③ に代入して　$\alpha\cdot\dfrac{\alpha^2-1}{2} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{8}$

$\therefore\ 4\alpha^3-4\alpha-(3+\sqrt{3})=0$

$(2\alpha-\sqrt{3}-1)\{2\alpha^2+(\sqrt{3}+1)\alpha+\sqrt{3}\}=0$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ だから $\alpha>0$　$\therefore\ \alpha=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

③ に代入して　$\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\sin\theta$, $\cos\theta$ は $t^2-\alpha t+\beta=0$　即ち $t^2-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}t+\dfrac{\sqrt{3}}{4}=0$ の2つの解であるから, $4t^2-2(\sqrt{3}+1)t+\sqrt{3}=0$ を解いて

$(2t-1)(2t-\sqrt{3})=0$ より $t=\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

即ち $(\sin\theta, \cos\theta) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ または $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ または $\dfrac{\pi}{3}$

①, ② に代入して交点は $(x, y) = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ または $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$

次に曲線の概形を求める。$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ で考える.

$x=2\sin\theta\cos^2\theta$,　$y=2\sin^2\theta\cos\theta$ より

$\dfrac{dx}{d\theta} = 2\{\cos\theta\cdot\cos^2\theta+\sin\theta\cdot 2\cos\theta(-\sin\theta)\} = 2\cos\theta(3\cos^2\theta-2)$

$\dfrac{dy}{d\theta} = 2\{2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta+\sin^2\theta(-\sin\theta)\} = 2\sin\theta(3\cos^2\theta-1)$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta}\Big/\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{\sin\theta(3\cos^2\theta-1)}{\cos\theta(3\cos^2\theta-2)}$

θ	0	……	θ_1	……	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dx}{d\theta}$	+	+	0	−	−
$\frac{dy}{d\theta}$	0	+	+	+	+
$\frac{dy}{dx}$	0	+	╳	−	−
x	0	↗	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
y	0	↗	$\frac{2\sqrt{6}}{9}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ では $\dfrac{dy}{d\theta}\geqq 0$

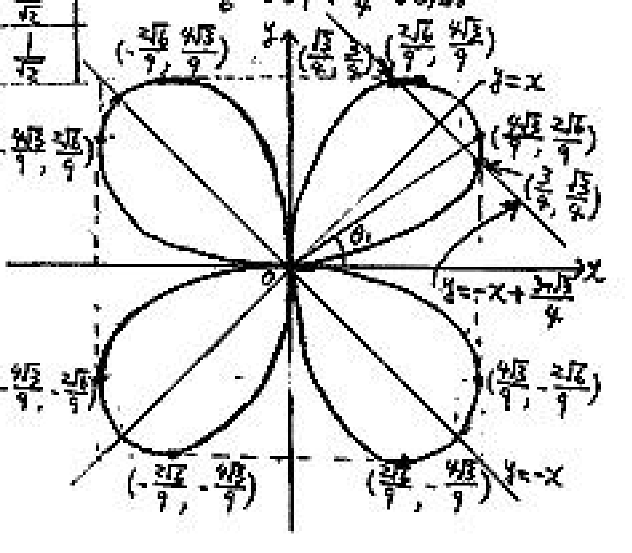
$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ となる θ を θ_1 とすると

$\cos\theta_1=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\sin\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0<\dfrac{\pi}{6}<\theta_1<\dfrac{\pi}{4}$ である。

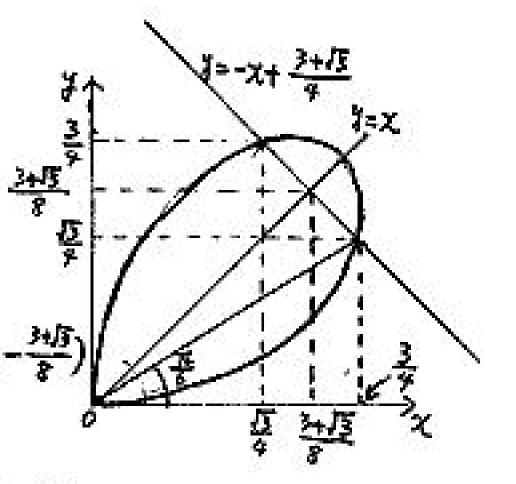
曲線は x 軸, y 軸, $y=x$ に関して対称であることからグラフの概形が得られる。



(5) 図形は $y=x$ に関して対称である。

$y=-x+\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ と $y=x$ との交点は

$\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{8}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{8}\right)$



求める面積を S とすると

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3+\sqrt{3}}{8}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{3+\sqrt{3}}{8}\right) - \int_0^{\frac{3}{4}} y\,dx$$
$$= \frac{3+3\sqrt{3}}{32} - \int_0^{\frac{3}{4}} y\,dx \quad \cdots\cdots ⑤$$

ここで　$x=\sin 2\theta\cos\theta$ とおくと $dx=2\cos\theta(3\cos^2\theta-2)\,d\theta$

x	$0 \to \frac{3}{4}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{6}$

よって $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2\theta\sin\theta\cdot 2\cos\theta(3\cos^2\theta-2)\,d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2\theta\left\{\frac{3(1+\cos 2\theta)}{2}-2\right\}d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\cdot\frac{-1+3\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(-1+3\cos 2\theta+\cos 4\theta-3\cos 4\theta\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{-1+3\cos 2\theta+\cos 4\theta-\frac{3}{2}(\cos 6\theta+\cos 2\theta)\right\}d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\left[-\theta+\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}+\frac{\sin 4\theta}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 6\theta}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

⑤ に代入して　$\dfrac{S}{2} = \dfrac{3+3\sqrt{3}}{32} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\therefore\ S = \dfrac{3-\sqrt{3}}{16}+\dfrac{\pi}{12}$ $\cdots\cdots$(答)

[IV]

(1) (あ) $\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(l-x)^2+b^2}$

(い) $\dfrac{a}{a+b}$

(2) (う) $\dfrac{\sin\theta\cos(\alpha+\theta)}{\cos\alpha\cos(\alpha-\theta)}$

(え) $\dfrac{\sin\theta\cos(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha-k\theta)\cos\{\alpha-(k+1)\theta\}}$

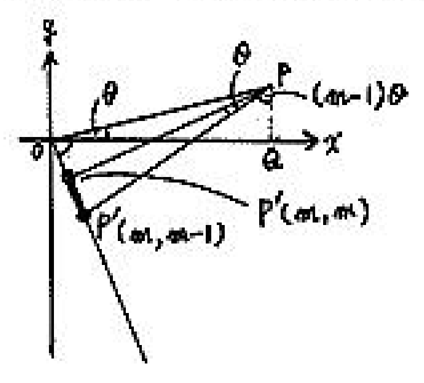
(お) $\dfrac{\alpha}{\theta}+1$　(か) $\dfrac{\sin n\theta\cos(\alpha+\theta)}{\cos\alpha\cos(\alpha-n\theta)}$

(3)

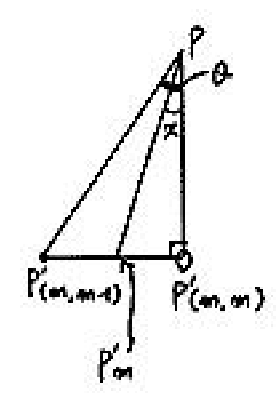
$m=\left[\dfrac{\alpha}{\theta}+1\right]$ より $(m-1)\theta\leqq\alpha<m\theta$

$\alpha=(m-1)\theta$, $m\theta$ のときの P'_m をそれぞれ $P'(m, m-1)$, $P'(m, m)$ とすると,

P'_{m-1} は図の太線部を動く。



$\angle PP'(m, m)O=\dfrac{\pi}{2}$ なので右図から PP'_{m-1} が最大となるのは, $\alpha=(m-1)\theta$ のときである。



$\left(\begin{array}{l} \because\ P'_{(m,m)}P \text{ と } PP'_m \text{ のなす角を } x\ \left(0<x\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\right) \\ \text{とすると} \\ PP'_m = \dfrac{PP'_{(m,m)}}{\cos x} \text{ となるため } x \text{ の増加関数} \end{array}\right)$

よって $n=m$, $\alpha=(m-1)\theta$ を代入して

$$\mathrm{Max}\sum_{k=0}^{m-1}P_kP_{k+1} = PP'_{(m,m-1)}$$
$$= \frac{\sin m\theta\cos m\theta}{\cos(m-1)\theta\cos\theta} \quad (答)$$

(4) (き) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

[I]

(1) (あ) $\sqrt{1-d^2}$ (い) bd

(う) $\dfrac{d}{b}\sqrt{\dfrac{1+b^2}{1-d^2}}$ (え) -1

(2) (お) $\sqrt{r^2-1}$ (か) $\dfrac{r^2}{r^2-1}$

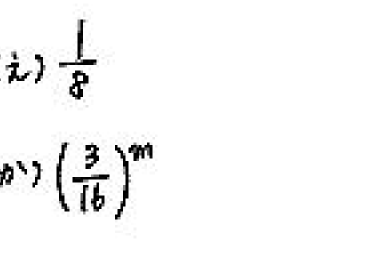
[II]

(1) (あ) $\dfrac{3}{4}$

(2) (い) $\dfrac{3}{16}$ (う) $\dfrac{3}{8}$ (え) $\dfrac{1}{8}$

(3) (お) $\dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{16}\right)^{m-1}$ (か) $\left(\dfrac{3}{16}\right)^{m}$

(4) $(2k-1)$回目, $2k$回目に2個が同時に同じ点を占めて取り除かれる確率をそれぞれ g_{2k-1}, g_{2k} とすると



$$\begin{cases} g_{2k-1} = \dfrac{1}{4}P_{2k-2} \\ g_{2k} = \dfrac{1}{8}P_{2k-2} \end{cases}$$

求める確率を Q_n とすると

i) $n=2m$ (=偶数) のとき

$$Q_n = Q_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} g_k = \sum_{k=1}^{m}(g_{2k-1}+g_{2k})$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4}P_{2k-2}+\frac{1}{8}P_{2k-2}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{3}{8}P_{2k-2}$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{3}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$$
$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{16}\right)^m}{1-\frac{3}{16}} = \frac{6}{13}\left\{1-\left(\frac{3}{16}\right)^m\right\}$$

$m=\dfrac{n}{2}$ を代入して $Q_n = \dfrac{6}{13}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$

ii) $n=2m+1$ (=奇数) のとき

$Q_n = Q_{2m+1} = Q_{2m} + g_{2m+1}$

i) の途中の式を利用して $Q_{2m} = \dfrac{6}{13}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^m\right\}$

また, $g_{2m+1} = \dfrac{1}{4}P_{2m} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{16}\right)^m$ も代入して

$$Q_n = \frac{6}{13}\left\{1-\left(\frac{3}{16}\right)^m\right\} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{16}\right)^m$$
$$= \frac{6}{13} - \frac{11}{52}\left(\frac{3}{16}\right)^m$$

$m=\dfrac{n-1}{2}$ を代入して

$$Q_n = \frac{6}{13} - \frac{11}{52}\left(\frac{3}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

以上 i), ii) より

$$Q_n = \begin{cases} \dfrac{6}{13}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & (n\text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{6}{13}-\dfrac{11}{52}\left(\dfrac{3}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}} & (n\text{が奇数のとき}) \end{cases} \cdots\cdots (答)$$

[III]

(1) (あ) $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ (い) $\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

(2) (う) -1, $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(3) (え) -1, $\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$

(4) $\begin{cases} x = |\sin 2\theta|\cos\theta = x(\theta) & \cdots\cdots ① \\ y = |\sin 2\theta|\sin\theta = y(\theta) & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とすると

$x(-\theta)=x(\theta)$, $y(-\theta)=-y(\theta)$ だからグラフは x軸に関して対称.

$x(\pi-\theta) = |\sin 2(\pi-\theta)|\cos(\pi-\theta) = -|\sin 2\theta|\cos\theta = -x(\theta)$

$y(\pi-\theta) = |\sin 2(\pi-\theta)|\sin(\pi-\theta) = |\sin 2\theta|\sin\theta = y(\theta)$

よってグラフは y軸に関して対称.

$x\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \left|\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = |\sin 2\theta|\sin\theta = y(\theta)$

$y\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \left|\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = |\sin 2\theta|\cos\theta = x(\theta)$

よってグラフは $y=x$ に関して対称.

従って, (1)の結果を使って,

xが最小値をとるのは $\left(-\frac{4\sqrt{3}}{9}, \pm\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$.

yが最大値をとるのは $\left(\pm\frac{2\sqrt{6}}{9}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$

yが最小値をとるのは $\left(\pm\frac{2\sqrt{6}}{9}, -\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$.

次に, この曲線と $y=-x+\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ との交点を求める。

明らかに $\frac{3+\sqrt{3}}{4} > \frac{4\sqrt{3}}{9}$ だから交点は第1象限にある。よって $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ で考える。このとき $|\sin 2\theta| = \sin 2\theta$ だから $y=-x+\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ に①, ②を代入して

$$\sin 2\theta\sin\theta = -\sin 2\theta\cos\theta + \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$
$$2\sin^2\theta\cos\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$
$$\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta) = \frac{3+\sqrt{3}}{8}$$

$\sin\theta+\cos\theta = \alpha$, $\sin\theta\cos\theta = \beta$ とおくと $\alpha\beta = \frac{3+\sqrt{3}}{8}$ $\cdots\cdots ③$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$ より $(\sin\theta+\cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cos\theta = 1$

$\therefore\ \alpha^2-2\beta=1$ $\cdots\cdots ④$, ③④を連立して解く

④より $\beta=\frac{\alpha^2-1}{2}$ を③に代入して $\alpha\cdot\frac{\alpha^2-1}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{8}$

$\therefore\ 4\alpha^3-4\alpha-(3+\sqrt{3})=0$

$(2\alpha-\sqrt{3}-1)\{2\alpha^2+(\sqrt{3}+1)\alpha+\sqrt{3}\}=0$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ だから $\alpha>0$ $\therefore\ \alpha=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

③に代入して $\beta=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\sin\theta$, $\cos\theta$ は $t^2-\alpha t+\beta=0$ 即ち $t^2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{4}=0$ の2つの解であるから, $4t^2-2(\sqrt{3}+1)t+\sqrt{3}=0$ を解いて

$(2t-1)(2t-\sqrt{3})=0$ より $t=\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$,

即ち $(\sin\theta, \cos\theta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ または $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\theta=\frac{\pi}{6}$ または $\frac{\pi}{3}$

①, ②に代入して交点は $(x, y) = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ または $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$

次に曲線の概形を求める。 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ で考える.

$x = 2\sin\theta\cos^2\theta$, $y = 2\sin^2\theta\cos\theta$ より

$\frac{dx}{d\theta} = 2\{\cos\theta\cdot\cos^2\theta + \sin\theta\cdot 2\cos\theta(-\sin\theta)\} = 2\cos\theta(3\cos^2\theta-2)$

$\frac{dy}{d\theta} = 2\{2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta + \sin^2\theta(-\sin\theta)\} = 2\sin\theta(3\cos^2\theta-1)$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \frac{\sin\theta(3\cos^2\theta-1)}{\cos\theta(3\cos^2\theta-2)}$

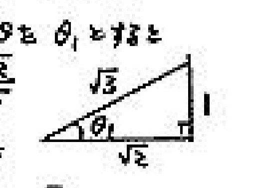
θ	0	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dx}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\frac{dy}{d\theta}$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{dy}{dx}$	0	$+$	$\times$	$-$	$-$
x	0	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
y	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{6}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ では $\frac{dy}{d\theta}\geqq 0$

$\frac{dx}{d\theta}=0$ となる θ を θ_1 とすると

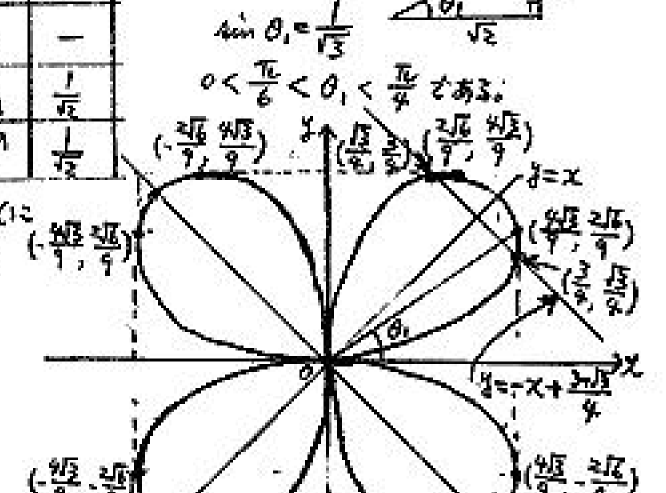
$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$0<\frac{\pi}{6}<\theta_1<\frac{\pi}{4}$ である.

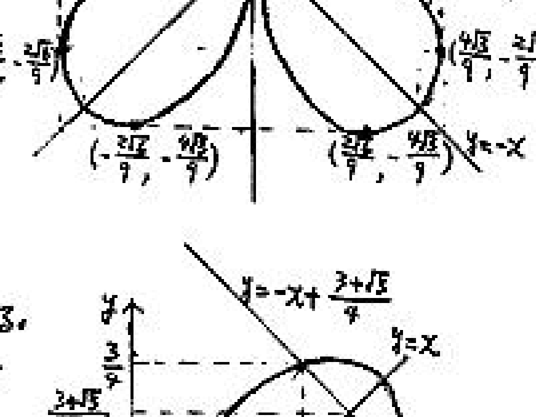
曲線は x軸, y軸, $y=x$ に関して対称であることからグラフの概形が得られる。



(5) 図形は $y=x$ に関して対称である。

$y=-x+\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ と $y=x$ との交点は

$\left(\frac{3+\sqrt{3}}{8}, \frac{3+\sqrt{3}}{8}\right)$



求める面積を S とすると

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3+\sqrt{3}}{8}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{3+\sqrt{3}}{8}\right) - \int_0^{\frac{3}{4}} y\,dx$$
$$= \frac{3+3\sqrt{3}}{32} - \int_0^{\frac{3}{4}} y\,dx \cdots\cdots ④$$

ここで $x=\sin 2\theta\cos\theta$ とおくと $dx = 2\cos\theta(3\cos^2\theta-2)\,d\theta$

x	$0 \to \frac{3}{4}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{6}$

よって $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2\theta\sin\theta\cdot 2\cos\theta(3\cos^2\theta-2)\,d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2\theta\left\{\frac{3(1+\cos 2\theta)}{2}-2\right\}d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\cdot\frac{-1+3\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(-1+3\cos 2\theta+\cos 4\theta-3\cos 4\theta\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{-1+3\cos 2\theta+\cos 4\theta-\frac{3}{2}(\cos 6\theta+\cos 2\theta)\right\}d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\left[-\theta+\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}+\frac{\sin 4\theta}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 6\theta}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

④に代入して $\dfrac{S}{2} = \dfrac{3+3\sqrt{3}}{32} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\therefore\ S = \frac{3-\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{12} \cdots\cdots (答)$$

[IV]

(1) (あ) $\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(l-x)^2+b^2}$

(い) $\dfrac{a}{a+b}$

(2) (う) $\dfrac{\sin\theta\cos(\alpha+\theta)}{\cos\alpha\cos(\alpha-\theta)}$

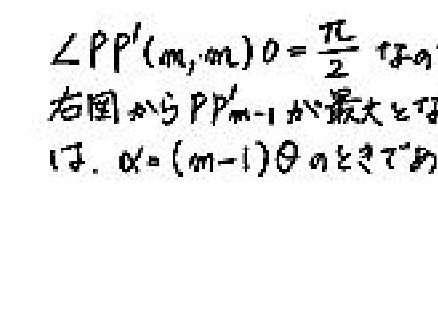
(え) $\dfrac{\sin\theta\cos(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha-k\theta)\cos\{\alpha-(k+1)\theta\}}$

(お) $\dfrac{\alpha}{\theta}+1$ (か) $\dfrac{\sin n\theta\cos(\alpha+\theta)}{\cos\alpha\cos(\alpha-n\theta)}$

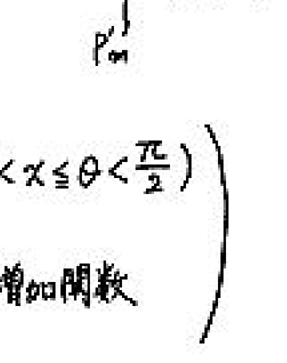
(3)

$m=\left[\dfrac{\alpha}{\theta}+1\right]$ より $(m-1)\theta\leqq\alpha<m\theta$

$\alpha=(m-1)\theta$, $m\theta$ のときの P'_m をそれぞれ $P'(m, m-1)$, $P'(m, m)$ とすると, P'_{m-1} は図の太線部を動く。



$\angle PP'(m,m)O = \dfrac{\pi}{2}$ なので右図から PP'_{m-1} が最大となるのは, $\alpha=(m-1)\theta$ のときである。



$\left(\because\ P'(m,m)P$ と PP'_m のなす角を x $\left(0<x\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると $PP'_m = \dfrac{PP'(m,m)}{\cos x}$ となるため x の増加関数$\right)$

よって $n=m$, $\alpha=(m-1)\theta$ を代入して

$$\mathrm{Max}\sum_{k=0}^{m-1}P_kP_{k+1} = PP'(m,m-1)$$
$$= \frac{\sin m\theta\cos m\theta}{\cos(m-1)\theta\cos\theta} \text{ (答)}$$

(4) (き) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$