

[I]

(1) あ $\frac{\pi}{12}$ い $3\sqrt{6}$ う $\frac{\pi}{4}$ え $4\sqrt{2}$

お $\frac{5(4-\sqrt{3})}{2}$

(2) か 3 き 2 く $9x+13$ け -26

こ -6 さ x^3+3x^2+6x+6

[II]

$$(1) \quad (i) \quad \text{あ} \quad \frac{n-1}{4^n}$$

$$(ii) \quad \text{い} \quad \frac{3}{8} \quad \text{う} \quad \frac{3}{32} \quad \text{え} \quad \frac{16n-45}{2 \cdot 4^{n-2}}$$

$$(2) \quad \text{お} \quad \frac{2}{25} \left(\frac{5n+2}{4^{n-1}} - \frac{20n-13}{9^{n-1}} \right)$$

[Ⅲ]

(1) あ $\frac{1}{2}$ い $\frac{1}{2}$ う $-\frac{1}{2}$ え $\frac{1}{2}$

(2) お $\frac{4}{3}\pi$

(3) か $x^2 + 2y^2 = 1$ き $\sqrt{2}$

[IV]

(1) あ 2

$$(2) \quad (1-x_{ij})a_i - b_{ij} = \sum_{k=1}^{2n} (1-x_{ij})x_{ik} - \sum_{k=1}^{2n} x_{ik}x_{jk} \\ = \sum_{k=1}^{2n} x_{ik}(1-x_{ij}-x_{jk}) \quad \cdots (4)$$

ここで, (A) $\iff x_{ij}, x_{jk}, x_{ik}$ は同時に 1 にならない

$\iff x_{ij}, x_{jk}, x_{ik}$ のうち少なくとも 1 つは 0

であるから, $x_{ik}(1-x_{ij}-x_{jk}) = \begin{cases} 0 & (x_{ik}=0 \text{ のとき}) \\ 0 \text{ または } 1 & (x_{ik}=1 \text{ のとき}) \end{cases}$

となり, $(4) \geq 0$ よって, $b_{ij} \leq (1-x_{ij})a_i$ (証明終)

(3) ①, ②より,

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k^2 = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} b_{ij} \leq \sum_{i=1}^{2n} a_i \sum_{j=1}^{2n} (1-x_{ij}) \\ = \sum_{i=1}^{2n} a_i (2n - a_i) = 4mn - \sum_{i=1}^{2n} a_i^2 \quad \therefore \sum_{k=1}^{2n} a_k^2 \leq 2mn \quad \cdots (5)$$

ここで $\sum_{k=1}^{2n} (ta_k + 1)^2 \geq 0$ であるから, $t = -\frac{1}{n}$ とすると

$$0 \leq \sum_{k=1}^{2n} \left(-\frac{a_k}{n} + 1 \right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2n} a_k^2 - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{2n} a_k + \sum_{k=1}^{2n} 1 \\ = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2n} a_k^2 - \frac{4m}{n} + 2n$$

であるから, ⑤より $0 \leq \frac{2m}{n} - \frac{4m}{n} + 2n$

よって, $m \leq n^2$ (証明終)

(4) い n

う $P_1, P_2, \dots, P_n$