

平成 16 (2004) 年度

慶應義塾大学入学試験問題

医 学 部

数 学

注意事項

1. 受験番号と氏名を解答用紙の所定の欄にそれぞれ必ず記入してください。
2. 解答は、必ず解答用紙の所定の欄に記入してください。
3. この問題冊子の余白を計算および下書きに用いてください。
4. この問題冊子の総ページ数は 8 ページです。試験開始の合図とともに全てのページが揃っているかどうか確認してください。ページが抜けていたり重複していたら直ちに監督者に申し出てください。
5. この問題冊子を試験終了後必ず持ち帰ってください。

[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

- (1) xy 平面上で, θ を媒介変数として

$$\begin{cases} x = 5 \cos \theta + \cos 5\theta \\ y = 5 \sin \theta + \sin 5\theta \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

で表される曲線を C とする。点 (x, y) が曲線 C 上にあるとき, $x + y$ は, $\theta =$

(あ) に対応する点で最大値 (い) をとり, $\theta =$ (う) に対応する点で
最小値 (え) をとる。また, 曲線 C の長さは (お) である。

- (2) $f(x)$ を x の多項式とする。ある定数 b が存在して, すべての自然数 n に対して等式

$$\sum_{k=1}^n f(k) = 2f(n) + n^3 + b$$

が成り立つとする。このとき, b と $f(x)$ を求めよう。 $f(x)$ の各項のうち, 次数の最

も高い項を ax^r ($a \neq 0, r \geq 0$) とし, $f(x) = ax^r + g(x)$ とおくと, $a =$ (か),

$r =$ (き) である。さらに, $g(x) =$ (く) であり, $b =$ (け) でなければ

ならない。

また, ある定数 c と x の多項式 $h(x)$ が存在して, すべての実数 x に対して

$$\int_0^x h(t) dt = h(x) + \frac{x^4}{4} + c$$

が成り立つとする。このとき $c =$ (こ), $h(x) =$ (さ) である。

[II]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

空の袋が2つと、赤球、白球、黒球がそれぞれたくさん用意されている。

- (1) 片方の袋に赤球1個と黒球1個を、他方の袋に赤球1個と白球1個を入れる。この状態から始め、それぞれの袋に球が入っている限り次の操作 T を繰り返す。

操作 T それぞれの袋から同時に球を1個ずつ取り出し、次の (a)～(c) のいずれかの処理を行う。

- (a) 取り出された2個の球が同じ色である場合は、それらを袋に戻さない。
- (b) 取り出された2個の球のうち1個だけが黒球である場合は、取り出された黒球以外の球を袋の外に用意されている黒球と取り替えて、それぞれの袋に黒球を1個ずつ戻す。
- (c) (a), (b) 以外の場合は、取り出された2個の球をそれぞれが入っていた袋に戻す。

以下、各回の操作を終えたときの状態のみに着目し、操作途中の状態を考えないものとする。また、 n を自然数とする。

- (i) 片方の袋に入っているのは赤球1個だけであり、かつ、他方の袋に入っているのは白球1個だけであるという状態を状態 A とする。 n 回目の操作を終えたとき初めて状態 A がおこる確率を p_n とすると、 $p_n =$ (あ) である。

- (ii) どちらの袋も空であるという状態を状態 B とする。 n 回目の操作を終えたとき初めて状態 B がおこる確率を q_n とすると、 $q_1 = q_2 = 0$ 、 $q_3 =$ (い)、 $q_4 =$ (う) であり、一般に $n \geq 5$ に対して $q_n =$ (え) である。

- (2) 一度どちらの袋も空にした後で、片方の袋に赤球1個と黒球2個を、他方の袋に赤球、白球、黒球をそれぞれ1個ずつ入れる。この状態から始め、それぞれの袋に球が入っている限り上の操作 T を繰り返す。この場合に n 回目の操作を終えたとき初めて状態 A がおこる確率を r_n とすると、 $r_n =$ (お) である。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

空間内の2点 $P(1, 0, 1)$, $Q(0, 1, -1)$ を通る直線 l を z 軸のまわりに1回転して得られる曲面を S とする。

(1) 直線 l 上の点 (x, y, z) は, $x = \boxed{\text{(あ)}} \times z + \boxed{\text{(い)}}$, $y = \boxed{\text{(う)}} \times z + \boxed{\text{(え)}}$ を満たす。

(2) S および2つの平面 $z = 1$, $z = -1$ により囲まれた部分の体積は $\boxed{\text{(お)}}$ である。

(3) k を正の数とする。点 $(1, 0, k)$ を通り y 軸を含む平面を α とし, 平面 α と曲面 S が交わってできる曲線を C とする。そして, C 上の各点を通り z 軸に平行な直線と xy 平面との交点のえがく図形を C_0 とする。 $k = 1$ のとき C_0 の方程式は $\boxed{\text{(か)}}$ である。また, $k = \boxed{\text{(き)}}$ のとき C_0 は平行な2つの直線である。

[IV]

設問(1)から(4)に答えなさい。

n を 2 以上の自然数とし、 $2n$ 個の点 $P_1, P_2, \dots, P_{2n}$ が同一円周上の異なる位置にある。これらの点のうちの 2 点を両端とする線分が m 本あり、さらに $m \geq 3$ のとき、次の条件 (A) が満たされていると仮定する。

(A) これらの線分のうちのどの 3 本も (点 $P_1, \dots, P_{2n}$ のうちの任意の 3 点を頂点とするような) 三角形を形づくることはない。

異なる 2 点 P_i と P_j を結ぶ線分があるとき $x_{ij} = x_{ji} = 1$ 、そうでないとき $x_{ij} = x_{ji} = 0$ とし、

$$a_i = \sum_{j=1}^{2n} x_{ij}, \quad b_{ij} = \sum_{k=1}^{2n} x_{ik} x_{jk} \quad (\text{ただし } x_{ii} = 0 \text{ とする})$$

とおくと、 $\sum_{i=1}^{2n} a_i = \boxed{\text{(あ)}} \times m$ となる。条件 (A) より、任意の i, j ($i = j$ の場合も含む) に対して

$$b_{ij} \leq (1 - x_{ij})a_i \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。さらに、任意の実数 t に対して $\sum_{k=1}^{2n} (ta_k + 1)^2 \geq 0$ が成り立つことと

$$\sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} b_{ij} = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \left(\sum_{k=1}^{2n} x_{ik} x_{jk} \right) = \sum_{k=1}^{2n} \left(\sum_{i=1}^{2n} x_{ik} \right) \left(\sum_{j=1}^{2n} x_{jk} \right) = \sum_{k=1}^{2n} a_k^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

を用いると

$$m \leq n^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

が示される。ただし、一般に N^2 個の数 c_{ij} ($1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$) に対して

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N c_{ij} \right) = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N c_{ij} \right)$$

であるので、括弧を省略して、この和を $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij}$ と書く。いま、 $\textcircled{3}$ の等号が成り立っている場合を考える。点 P_{2n} と線分で結ばれているのは点 $P_1, P_2, \dots, P_r$ のみであるとすると、 $r = \boxed{\text{(い)}}$ でなければならない。このとき、点 P_{2n-1} と線分で結ばれているのは点 $\boxed{\text{(う)}}$ のみである。

(1) $\boxed{\text{(あ)}}$ に適切な数を入れなさい。

(2) $\textcircled{1}$ を証明しなさい。

(3) $\textcircled{3}$ を証明しなさい。(②は証明なしで用いてよい。)

(4) $\boxed{\text{(い)}}$ に適切な数または式を、 $\boxed{\text{(う)}}$ に適切な点の列を入れなさい。