

[I]

(1) あ : $\frac{1}{4}$

い : $\frac{7\sqrt{6}}{12}$

う : $\frac{19}{5}$

え : $\frac{8}{5}$

(2) お : $-\frac{1}{x^2}\sin x - \frac{1}{x}\cos x$

か : $\frac{32}{9\pi^2} + \frac{2}{\pi}$

[II]

$$(1) \quad \text{あ} : \frac{13}{36}$$

$$\text{い} : \frac{1}{18}$$

$$\text{う} : \frac{115}{432}$$

$$(2) \quad \text{え} : \frac{5}{36}$$

$$\text{お} : -\frac{1}{9}$$

$$\text{か} : -\frac{1}{18}$$

$$\text{き} : \frac{7}{36}$$

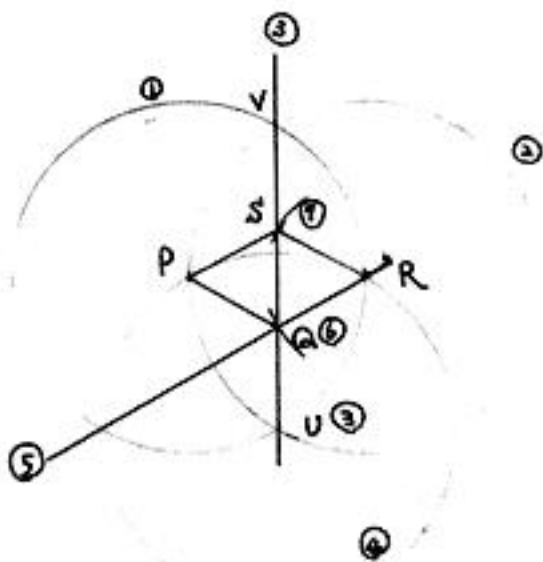
$$\text{く} : \frac{1}{9}$$

$$\text{け} : \frac{7}{11} \left(\frac{1}{12} \right)^n + \frac{4}{11}$$

$$\text{こ} : \frac{14}{33} \left(\frac{1}{12} \right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n + \frac{8}{33}$$

[Ⅲ]

(1)



- ① P を中心とし、R を通る円をコンパスでかく。
- ② R を中心とし、P を通る円をコンパスでかく。
- ③ ①の円と②の円との交点をそれぞれ U, V とおく。
- ④ U を中心とし、P を通る円をコンパスでかく。
- ⑤ ①の円と④の円の交点のうち、R でない方を W とおく。
- ⑥ 直線 WR, 直線 UV を定規でひき、
その2直線の交点を Q とおく。
- ⑦ R を中心とし、Q を通る円をコンパスでかく。
- ⑧ ⑦の円と直線 UV との交点の内、Q でない方を S とおく。
- ⑨ PQ, QR, RS, SP を定規でむすび、四角形 PQRS を作る。

上の手順で得られる四角形 PQRS が求めるものである。…(答)

(2) 複素数平面をかぶせて考える。

A, B に対応する複素数は $-1, 1$ である。C, D, E, F に対応する複素数をそれぞれ z, w_1, w_2, w_3 とおく。

このとき、問題文の条件から、

D は、C を B 中心に -30° 回転、 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 縮小した点なので、

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ)) (z - 1) + 1 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i \right) (z - 1) + 1 \quad \dots(\text{ア}) \end{aligned}$$

同様にして、

$$w_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i \right) (-1 - z) + z \quad \dots(\text{イ})$$

$$w_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i \right) \cdot 2 - 1 \quad \dots(\text{ウ})$$

である。

(ア), (イ), (ウ) より、 $\overline{DF}$ と $\overline{DE}$ の関係を調べると

$$\begin{aligned} \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} &= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i \right) \cdot 2 - 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i \right) (z - 1) - 1}{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i \right) (-1 - z) + z - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i \right) (z - 1) - 1} \\ &= \frac{-\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i \right) z - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)}{\frac{\sqrt{3}}{3} iz - 1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ &= 1 \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \end{aligned}$$

であるから

$\overline{DF}$ は $\overline{DE}$ を 60° 回転したもの、とわかる。

従って、 $\triangle DEF$ は正三角形であることが示された。

(証明終)

(3) $\triangle ABC$ の重心に対応する複素数は $\frac{(-1) + 1 + z}{3} = \frac{z}{3}$

また(ア), (イ), (ウ) より、 $\triangle DEF$ の重心に対応する複素数は

$$\begin{aligned} \frac{w_1 + w_2 + w_3}{3} &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i \right) ((z - 1) + (-1 - z) + 2) + 1 + z + (-1) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i \right) \cdot 0 + z \right\} = \frac{z}{3} \end{aligned}$$

以上より、両者が一致することがわかるので、

$\triangle DEF$ の重心は $\triangle ABC$ の重心と一致する。

(証明終)

[IV]

- (1) $0 \leq x \leq 1$ では $f'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} \geq 0$ より $f(x)$ は単調増加。
 よって $f(x) - f_0(x) = f(x) - 1$ において、
 $(0 \Rightarrow) f(0) - 1 \leq f(x) - f_0(x) \leq f(1) - 1 (= \sqrt{e} - 1) \dots \textcircled{1}$
 ①の右側の不等号から、結論の不等式を得る。

(証明終)

- (2) より強く、 $n = 0, 1, 2, \dots$ での題の不等式の成立…☆☆
 を証明する。数学的帰納法による。

[ここで、 $n = 0$ のときの右辺で、 x^0 は 1 と約束する。]

(・) $n = 0$ のとき、題の不等式は①と同一なので成立。

(・) $k \geq 0$ に対して

$$0 \leq f(x) - f_k(x) \leq \frac{1}{2^k k!} (\sqrt{e} - 1) x^{2k} \dots \textcircled{2}$$

と仮定して

$$0 \leq f(x) - f_{k+1}(x) \leq \frac{1}{2^{k+1} (k+1)!} (\sqrt{e} - 1) x^{2(k+1)} \dots \star$$

を示す。

$$\text{問題文の式} \quad : f(x) = 1 + \int_0^x t f(t) dt$$

$$f_{k+1}(x) \text{ の定義式} : f_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x t f_k(t) dt$$

を辺々引いて、

$$f(x) - f_{k+1}(x) = \int_0^x t (f(t) - f_k(t)) dt \dots \textcircled{4}$$

を得る。

④の左辺において②より、 $0 \leq t \leq x$ で

$$0 \leq t(f(t) - f_k(t)) \leq t \cdot \frac{1}{2^k k!} (\sqrt{e} - 1) t^{2k} = \frac{1}{2^k k!} (\sqrt{e} - 1) t^{2k+1}$$

であるので、積分の単調性から

$$(0 \Rightarrow) \int_0^x 0 dt \leq f(t) - f_k(t) \leq \int_0^x \frac{1}{2^k k!} (\sqrt{e} - 1) t^{2k+1} dt \dots \textcircled{5}$$

がわかる。ここで、⑤の右辺は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^k k!} (\sqrt{e} - 1) \frac{1}{2(k+1)} \left[t^{2(k+1)} \right]_0^x \\ &= \frac{1}{2^{k+1} (k+1)!} (\sqrt{e} - 1) x^{2(k+1)} \end{aligned}$$

であるから、④より☆が示された。

[(・)で $k = 0$ のときも、上記の約束より問題ない。]

以上(・),(・)から☆☆は成立し、特に $n \geq 1$ として
 題意は示された。(証明終)

- (3) $f(1) = \sqrt{e}$ だったから、(2)の不等式で $\begin{cases} n=5 \\ x=1 \end{cases}$ として

$$0 \leq \sqrt{e} - f_5(1) \leq \frac{1}{2^5 5!} (\sqrt{e} - 1) = \frac{1}{3840} (\sqrt{e} - 1)$$

を得る。ここで $e < 4$ より $\sqrt{e} - 1 < \sqrt{4} - 1 = 1$ であるから、

$$0 \leq \sqrt{e} - f_5(1) \leq \frac{1}{3840} \dots \textcircled{7} \quad \text{がいえる。}$$

$$\text{今、} f_1(t) = 1 + \int_0^t t \cdot 1 dt = 1 + \frac{t^2}{2}$$

$$f_2(t) = 1 + \int_0^t t \left(1 + \frac{t^2}{2} \right) dt = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}$$

…と、定義に従って $f_n(t)$ を順次計算していくと、

$$f_5(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48} + \frac{t^8}{384} + \frac{t^{10}}{3840} \quad \text{を得る。}$$

よって、

$$f_5(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840} = \frac{6331}{3840} \dots \textcircled{8}$$

$$\text{以上⑦,⑧から} \quad \frac{6331}{3840} = f_5(1) \leq \sqrt{e} \leq \frac{6332}{3840} \quad \text{であり、}$$

上式で $\begin{cases} (\text{左辺}) = 1.6846\dots \\ (\text{右辺}) = 1.6849\dots \end{cases}$ なので、結局

$$f_5(1) \text{ も } \sqrt{e} \text{ も小数第三位までが } 1.684$$

とわかる。従って題意が示された。(証明終)